РАЗЛОЖЕНИЕ

НА МНОЖИТЕЛИ

учебное пособие для школьников
7-8 классов

Автор
Трепачёв Дмитрий

2025 год, v1.0.0

Введение

Всем привет! Меня зовут Трепачёв Дмитрий. Я работаю репетитором по математике, физике и информатике с 2010 года. За это время через мои занятия прошли сотни учеников — от пятиклассников, которые только начинают знакомиться с алгеброй, до выпускников, готовящихся к ЕГЭ и поступлению в вузы.

Эту книгу я сделал для своих занятий. Почему именно разложение на множители? Потому что это одна из самых важных тем в школьной математике. Разложение на множители нужно везде: при решении уравнений и неравенств, при работе с дробями, при исследовании функций. Без уверенного владения этим навыком очень трудно двигаться дальше.

В школьных учебниках, конечно, всё это есть. Но беда в том, что приёмы разложения раскиданы по разным местам — один в седьмом классе, другой в восьмом, третий вообще в девятом. А когда начинается подготовка к экзаменам, ученику приходится собирать эту мозаику по кусочкам. Да и задач в учебниках часто маловато — особенно на комбинацию разных способов.

В этой книге я собрал все основные приёмы разложения на множители в одном месте:

- вынесение общего множителя;
- метод группировки;
- разность квадратов;
- квадрат суммы и квадрат разности;
- разложение кубов;
- разложение квадратного трёхчлена через корни;
- схема Горнера для многочленов высших степеней.

Каждому способу посвящена отдельная глава с теорией, примерами и большим количеством задач. А в конце есть главы, где все приёмы перемешаны — чтобы научиться выбирать правильный способ и комбинировать их.

Эта книга пригодится не только моим ученикам, но и всем, кто хочет разобраться в теме самостоятельно. А ещё я буду рад, если другие репетиторы станут использовать её на своих занятиях — берите свободно, пользуйтесь, задавайте побольше примеров своим ученикам.

Больше моих книг вы можете найти на сайте books.mrepetitor.com. Там есть и другие пособия по математике и физике — всё, что я наработал за годы преподавания, а также научно-популярные книги, написанные мною для тех учеников, которые хотят знать больше про историю науки и окружающий мир.

Записаться на мои занятия можно на сайте study.mrepetitor.com. Я преподаю математику и физику для школьников с 5 по 11 классы, готовлю к ЕГЭ, ОГЭ и ЦТ. Если вам или вашему ребёнку нужна помощь — милости прошу!

Удачи в изучении математики!

Дмитрий Трепачёв

Оглавление

Вынесение общего множителя

Теория

Представьте, что у вас есть выражение, и вас попросили разложить его на множители. С чего начать? С самого простого — посмотреть, нет ли чего-то одинакового во всех слагаемых.

Если в каждом слагаемом есть одно и то же число или одна и та же буква (а может, и то и другое сразу), то это общее можно взять и вынести за скобки. А внутри скобок останется то, что получилось после того, как общее убрали.

Это как собрать общую часть и вытащить её наружу.

Как это записывают:

$$\mathbf{ab} + \mathbf{ac} = \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

Здесь a — это то общее, что было в каждом слагаемом. В скобках — то, что осталось.

Пример 1

Вынесение общего числового множителя

Рассмотрим самый простой случай. Пусть нам нужно разложить на множители такое выражение, в котором у обоих слагаемых есть одно и то же число:

$$5x + 5y$$

Давайте посмотрим на слагаемые. В первом стоит $5x$, во втором $5y$. И там и там есть пятёрка. Значит, это общий множитель. Выносим её за скобки:

$$5x + 5y = 5(x + y)$$

В скобках осталось то, что получилось после деления каждого слагаемого на 5: x и y.

Пример 2

Вынесение общего делителя

Теперь разберём пример, где общий множитель не сразу бросается в глаза:

$$12x - 6$$

Первое слагаемое 12x, второе 6. Какое число есть и в 12, и в 6? Конечно, 6 (потому что 12 = 6·2). Значит, общий множитель — 6. Выносим его:

$$12x - 6 = 6(2x - 1)$$

Обратите внимание: когда мы вынесли 6, от первого слагаемого осталось $2x$, от второго — 1. Единица обязательно должна оставаться, если слагаемое целиком состоит из общего множителя.

Пример 3

Вынесение общей буквенной части

А теперь посмотрим, как работать с буквами. Пусть нам дано:

$$a^3 + a^2$$

Здесь общее — буква a. Но в первом слагаемом a в третьей степени, во втором — во второй. Какую степень выносить? Всегда берём ту, которая меньше. В данном случае это a^2. Выносим:

$$a^3 + a^2 = a^2(a + 1)$$

Проверим: $a^2 \cdot a = a^3$, $a^2 \cdot 1 = a^2$. Всё верно.

Пример 4

Комбинация числа и букв

Теперь попробуем пример посложнее, где нужно искать общее и среди чисел, и среди букв:

$$8x^3y^2 - 4x^2y$$

Давайте разберём по частям. Сначала посмотрим на числа: 8 и 4. Их общий делитель — 4. Теперь посмотрим на букву x: в первом слагаемом x^3, во втором x^2. Берём меньшую степень — x^2. Теперь буква y: в первом слагаемом y^2, во втором y. Берём y. Получили общий множитель $4x^2y$. Выносим его:

$$8x^3y^2 - 4x^2y = 4x^2y(2xy - 1)$$

Проверим: $4x^2y \cdot 2xy = 8x^3y^2$, $4x^2y \cdot (-1) = -4x^2y$. Всё сходится.

Пример 5

Несколько слагаемых

Рассмотрим случай, когда слагаемых не два, а три:

$$15a^2b + 10ab^2 - 5ab$$

Ищем общее по частям:

- Числа: 15, 10, 5 — общее число 5.
- Буквы a: в первом a^2, во втором a, в третьем a — берём a.
- Буквы b: в первом b, во втором b^2, в третьем b — берём b.

Общий множитель получился $5ab$. Выносим его:

$$15a^2b + 10ab^2 - 5ab = 5ab(3a + 2b - 1)$$

Важно! Когда выносите общий множитель, каждое слагаемое должно на него поделиться. Если слагаемое и есть тот самый общий множитель, то в скобках после него остаётся 1. В этом примере так и получилось с последним слагаемым: $5ab$ разделить на $5ab$ даёт 1.

Пример 6

Общая скобка

Бывает так, что общим множителем является не число и не буква, а целая скобка. Например:

$$x(a + b) + y(a + b)$$

Посмотрите: первое слагаемое — это x, умноженное на скобку $(a + b)$, второе — y, умноженное на ту же скобку. Значит, скобка $(a + b)$ есть в обоих слагаемых. Выносим её как общий множитель:

$$x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$$

Пример 7

Общая скобка с коэффициентами

Вот похожий пример, но теперь перед скобками стоят числа:

$$3x(a - 2) + 5y(a - 2)$$

Общая скобка та же — $(a - 2)$. Выносим её:

$$3x(a - 2) + 5y(a - 2) = (a - 2)(3x + 5y)$$

Числа 3 и 5 остались внутри второй скобки.

Пример 8

Общая скобка со знаком минус

Теперь разберём случай, где нужно быть внимательным со знаками:

$$7a(x - 3) - 2b(x - 3)$$

Здесь тоже общая скобка $(x-3)$. Выносим её, но следим за знаком: второе слагаемое было с минусом, значит и во второй скобке будет минус:

$$7a(x-3)-2b(x-3)=(x-3)(7a-2b)$$

Пример 9

Общая скобка без множителя

И последний пример на эту тему. Что делать, если перед скобкой нет ни числа, ни буквы? Например:

$$2x(3y+1)+5(3y+1)$$

В первом слагаемом перед скобкой стоит $2x$, во втором — ничего, но на самом деле там стоит невидимая единица. Запишем это явно:

$$2x(3y+1)+1\cdot(3y+1)$$

Теперь хорошо видно, что общая скобка $(3y+1)$. Выносим её:

$$2x(3y+1)+5(3y+1)=(3y+1)(2x+5)$$

Задачи

1. Разложите на множители:

1) $7a+7b$ **2)** $12x-12y$ **3)** $8m+8$ **4)** $15a-5$ **5)** $9x+18$ **6)** $24y-16$ **7)** $14a+21$ **8)** $11x+11$ **9)** $18a+27b$ **10)** $32m-24n$ **11)** $45p+30q$ **12)** $28x-35y$ **13)** $56a+42b$ **14)** $63m-54n$ **15)** $81x+72y$ **16)** $49a-28b$

2. Разложите на множители:

1) x^2+x **2)** a^3-a^2 **3)** y^5+y^3 **4)** b^4-b^2 **5)** m^6+m^4 **6)** n^7-n^5 **7)** $p^4+p^3-p^2$ **8)** $c^5-c^4+c^3$ **9)** x^7+x^5 **10)** a^8-a^6 **11)** y^9+y^7 **12)** $b^{10}-b^8$ **13)** $m^{11}+m^9$ **14)** $n^{12}-n^{10}$ **15)** $p^6+p^5-p^4$ **16)** $c^7-c^6+c^5$

3. Разложите на множители:

1) $8a^2+4a$ **2)** $15x^3-5x^2$ **3)** $12y^4+18y^3$ **4)** $21m^5-14m^4$ **5)** $10a^3b+15a^2b^2$ **6)** $24x^2y^3-18x^3y^2$ **7)** $16x^3y^2+24x^2y^3$ **8)** $32a^4b^3-48a^3b^4$ **9)** $25m^5n^4+35m^4n^5$ **10)** $49p^6q^5-63p^5q^6$ **11)** $18a^3b^2c+27a^2b^3c$ **12)** $36x^4y^3z^2-48x^3y^4z^2$

4. Разложите на множители:

1) $30p^4q^2+20p^3q^3-10p^2q^2$ **2)** $18a^4b^3-12a^3b^4+6a^3b^3$ **3)** $45x^5y^4-30x^4y^5+15x^4y^4$ **4)** $36m^6n^5-48m^5n^6+24m^5n^5$ **5)** $28a^5b^4-42a^4b^5+56a^4b^4$ **6)** $54p^7q^6-36p^6q^7+72p^6q^6$

5. Разложите на множители:

1) $x(a+b)+y(a+b)$ **2)** $3a(m-n)+5b(m-n)$ **3)** $7x(p+2)-4y(p+2)$ **4)** $2a(3x-1)+5(3x-1)$ **5)** $9m(2y+3)-4n(2y+3)$ **6)** $x(y-5)+3(y-5)$ **7)** $4a(2b+1)-7(2b+1)$ **8)** $8p(3q-2)+5(3q-2)$ **9)** $6x(4y+3)-7(4y+3)$

10) $5a(3b-2)+9b(3b-2)$

11) $12m(5n-1)-8n(5n-1)$

12) $15p(2q+5)-10q(2q+5)$

Метод группировки

Теория

Бывает так, что общего множителя у всех слагаемых нет. Но если присмотреться, то можно заметить, что у одних слагаемых общее есть, и у других — тоже есть. Тогда эти слагаемые можно сгруппировать и вынести общее из каждой группы.

Как это записывают:

$$\mathbf{ac + bc + ad + bd = (a + b)(c + d)}$$

Здесь мы сгруппировали первое со вторым (есть общее c) и третье с четвёртым (есть общее d):

$$(ac + bc) + (ad + bd) = c(a + b) + d(a + b) = (a + b)(c + d)$$

Алгоритм действий:

1. Разбиваем слагаемые на группы (обычно по 2-3 слагаемых) так, чтобы в каждой группе было что-то общее.
2. В каждой группе выносим общий множитель за скобки.
3. Смотрим — получилось так, что теперь у всех групп есть общая скобка? Если да, выносим её за скобки.

Пример 1

Группировка по два слагаемых

Рассмотрим самый простой случай. Пусть нам нужно разложить на множители такое выражение, в котором слагаемые уже сами подсказывают, как их группировать:

$$ax + ay + bx + by$$

Давайте посмотрим: у нас четыре слагаемых. У первых двух есть общая буква a, у последних двух — общая буква b. Значит, можно сгруппировать их так:

$$(ax + ay) + (bx + by)$$

В первой группе выносим a, во второй — b:

$$a(x + y) + b(x + y)$$

Теперь у нас получилось два слагаемых, и у каждого есть общая скобка $(x + y)$. Выносим её:

$$(x + y)(a + b)$$

Вот и всё — выражение разложено на множители.

Пример 2

Другой способ группировки

Давайте теперь попробуем взять то же выражение и посмотрим, можно ли сгруппировать слагаемые иначе:

$$ax + ay + bx + by$$

На этот раз сгруппируем первое слагаемое с третьим, а второе с четвёртым:

$$(ax + bx) + (ay + by)$$

В первой группе выносим x, во второй — y:

$$x(a + b) + y(a + b)$$

И снова у нас появилась общая скобка $(a + b)$. Выносим её:

$$(a + b)(x + y)$$

Обратите внимание — результат получился точно такой же, как в первом примере, только множители поменялись местами. Значит, группировать можно по-разному, главное — чтобы в конце появилась общая скобка.

Пример 3

Появление минусов

Теперь рассмотрим случай, когда в выражении появляются знаки минус. Пусть нам нужно разложить:

$$ax - ay + bx - by$$

Давайте сгруппируем первые два и последние два слагаемых:

$$(ax - ay) + (bx - by)$$

В первой группе выносим a, во второй — b:

$$a(x - y) + b(x - y)$$

Отлично! У нас опять общая скобка $(x - y)$. Выносим её:

$$(x - y)(a + b)$$

Ничего сложного — минусы не помешали.

Пример 4

Внимание со знаками

Давайте теперь посмотрим на случай, в котором при разложении возникают проблемы со знаками. Пусть нам нужно разложить следующее выражение:

$$ax - ay - bx + by$$

Сгруппируем первое со вторым и третье с четвёртым:

$$(ax - ay) + (-bx + by)$$

В первой группе всё просто — выносим a:

$$a(x - y) + (-bx + by)$$

А вот со второй группой надо подумать. Если вынести b, то получится $b(-x + y)$. Это не очень удобно, потому что в скобке не $(x - y)$, а почти, но знаки перепутаны. Давайте вынесем $-b$:

$$(-bx + by) = -b(x - y)$$

Теперь наше выражение выглядит так:

$$a(x - y) - b(x - y)$$

Вот теперь порядок — у нас общая скобка $(x - y)$. Выносим её:

$$(x - y)(a - b)$$

В таких случаях нужно быть особенно внимательным со знаками.

Пример 5

Выносим минус за скобку

Рассмотрим ещё один похожий пример, где удобно вынести минус:

$$ax + ay - bx - by$$

Попробуем сгруппировать первые два и последние два:

$$(ax + ay) + (-bx - by)$$

В первой группе выносим a, во второй группе замечаем, что можно вынести $-b$:

$$a(x + y) - b(x + y)$$

Теперь у нас общая скобка $(x + y)$. Выносим её:

$$(x + y)(a - b)$$

Видите, как удобно — минус сам попал во второй множитель.

Пример 6

Появляются числа

Теперь давайте усложним задачу. Пусть в выражении вместо букв появляются числа:

$$2x^2 + 3x + 2xy + 3y$$

Давайте разберёмся, что у нас тут. Первое слагаемое $2x^2$, второе $3x$, третье $2xy$, четвёртое $3y$. Может быть, есть смысл сгруппировать первое с третьим (у них обоих есть x) и второе с четвёртым (у них есть числа 3)? Попробуем:

$$(2x^2 + 2xy) + (3x + 3y)$$

В первой группе выносим $2x$, во второй — 3:

$$2x(x + y) + 3(x + y)$$

Заметили? У нас получилась общая скобка $(x + y)$. Выносим её:

$$(x + y)(2x + 3)$$

Числа не помешали — они просто вошли в множители.

Пример 7

Работа со степенями

Рассмотрим выражение, в котором у букв разные степени:

$$x^3 + x^2 + x + 1$$

Здесь четыре слагаемых с разными степенями x. Давайте сгруппируем первые два (там есть общий множитель x^2) и последние два (там просто x и 1, но общего множителя нет, кроме невидимой единицы):

$$(x^3 + x^2) + (x + 1)$$

В первой группе выносим x^2:

$$x^2(x + 1) + (x + 1)$$

А теперь посмотрите внимательно: во втором слагаемом тоже есть скобка $(x + 1)$, просто перед ней стоит невидимая единица. Запишем это так:

$$x^2(x + 1) + 1 \cdot (x + 1)$$

Теперь хорошо видно, что общая скобка $(x + 1)$. Выносим её:

$$(x + 1)(x^2 + 1)$$

Пример 8

Когда слагаемых много

Давайте попробуем разобраться с более длинным выражением. Пусть нам нужно разложить:

$$ab + ac + b^2 + bc + a + b$$

Здесь целых шесть слагаемых. Нужно придумать, как их сгруппировать. Первое и второе связаны буквой a, третье и четвёртое — буквой b, пятое и шестое — просто a и b. Попробуем так:

$$(ab + ac) + (b^2 + bc) + (a + b)$$

В первой группе выносим a, во второй — b:

$$a(b + c) + b(b + c) + (a + b)$$

Обратите внимание: у первых двух слагаемых появилась общая скобка $(b + c)$. Вынесем её:

$$(b + c)(a + b) + (a + b)$$

Теперь у нас два слагаемых, и у каждого есть общая скобка $(a+b)$. Во втором слагаемом перед скобкой стоит 1:

$$(a+b)(b+c)+1\cdot(a+b)$$

Выносим общую скобку $(a+b)$:

$$(a+b)(b+c+1)$$

Вот так, шаг за шагом, мы справились даже с таким длинным выражением.

Пример 9

Комбинируем числа и буквы

Рассмотрим ещё один пример с числами и разными буквами:

$$2a+2b+ma+mb+na+nb$$

Давайте посмотрим: первые два слагаемых имеют общую двойку, следующие два — общую букву m, последние два — общую букву n. Это подсказывает нам группировку:

$$(2a+2b)+(ma+mb)+(na+nb)$$

В первой группе выносим 2, во второй — m, в третьей — n:

$$2(a+b)+m(a+b)+n(a+b)$$

Теперь у всех трёх слагаемых общая скобка $(a+b)$. Выносим её:

$$(a+b)(2+m+n)$$

Вот так просто — главное было правильно сгруппировать.

Задачи

1. Разложите на множители:

1) $ax+ay+bx+by$

2) $mx+my+nx+ny$

3) $px+py+qx+qy$

4) $ab+ac+db+dc$

5) $am+an+bm+bn$

6) $xy+xz+wy+wz$

7) $2x+2y+ax+ay$

8) $3a+3b+ma+mb$

9) $5m+5n+km+kn$

10) $ax-ay+bx-by$

11) $mx-my+nx-ny$

12) $ab-ac+db-dc$

2. Разложите на множители:

1) $ax-ay-bx+by$

2) $mx-my-nx+ny$

3) $ab-ac-db+dc$

4) $2x-2y+ax-ay$

5) $3a-3b+ma-mb$

6) $5m-5n-km+kn$

7) $x^2+xy+xz+yz$

8) $a^2+ab+ac+bc$

9) $m^2+mn+mp+np$

10) $x^2-xy+xz-yz$

11) $a^2-ab+ac-bc$

12) $m^2-mn-mp+np$

3. Разложите на множители:

1) x^3+x^2+x+1

2) a^3+a^2+a+1

3) y^3+y^2+y+1

4) x^3-x^2+x-1

5) a^3-a^2+a-1

6) b^3-b^2+b-1

7) $2x^3+x^2+2x+1$

8) $3a^3+a^2+3a+1$

9) $5y^3+y^2+5y+1$

10) $2x^3-x^2+2x-1$

11) $3a^3-a^2+3a-1$

12) $4b^3-b^2+4b-1$

4. Разложите на множители:

1) $2x+2y+ax+ay+bx+by$

2) $3a+3b+ma+mb+na+nb$

3) $4m+4n+pm+pn+qm+qn$

4) $ab+ac+ad+b^2+bc+bd$

5) $xy+xz+xw+y^2+yz+yw$

6) $mn+mp+mq+n^2+np+nq$

7) $x^2+xy+xz+x+y+z$

8) $a^2+ab+ac+a+b+c$

9) $m^2+mn+mp+m+n+p$

10) $x^2-xy+xz-x+y-z$

11) $a^2-ab+ac-a+b-c$

12) $m^2-mn+mp-m+n-p$

5. Разложите на множители:

1) $x^2+2x+xy+2y$

2) $a^2+3a+ab+3b$

3) $m^2+4m+mn+4n$

4) $x^2-2x+xy-2y$

5) $a^2-3a+ab-3b$

6) $m^2-4m+mn-4n$

7) $2x^2+3x+2xy+3y$

8) $3a^2+4a+3ab+4b$

9) $5m^2+6m+5mn+6n$

10) $2x^2-3x+2xy-3y$

11) $3a^2-4a+3ab-4b$

12) $4b^2-5b+4bc-5c$

Разность квадратов

Теория

Теперь познакомимся с ещё одним способом разложения на множители. Он основан на формуле, которую нужно запомнить.

Как это записывают:

$$\mathbf{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}$$

Читается так: разность квадратов двух выражений равна произведению их разности и суммы.

Эта формула очень удобна — если вы увидели разность двух квадратов, то сразу можете записать ответ.

Пример 1

Две буквы

Рассмотрим самый простой случай. Пусть нам нужно разложить на множители:

$$x^2 - y^2$$

Здесь у нас разность квадратов двух букв: x^2 — это квадрат x, а y^2 — квадрат y. Применяем формулу $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, где $a = x$, $b = y$:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

Вот и всё.

Пример 2

Число

Теперь возьмём пример, где вместо буквы стоит число:

$$a^2 - 9$$

Давайте посмотрим: a^2 — это квадрат a. А 9 — это квадрат числа 3 (потому что $3^2 = 9$). Значит, у нас разность квадратов: $a^2 - 3^2$.

Применяем формулу, где $a = a$, $b = 3$:

$$a^2 - 9 = (a - 3)(a + 3)$$

Пример 3

Число побольше

Теперь разберём пример с числом побольше. Пусть нам нужно разложить:

$$y^2 - 121$$

Давайте подумаем: 121 — это квадрат какого числа? Вспоминаем таблицу умножения: $11^2 = 121$. Значит, 121 — это квадрат числа 11.

Тогда наше выражение можно записать как $y^2 - 11^2$. Применяем формулу:

$$y^2 - 121 = (y - 11)(y + 11)$$

Пример 4

Когда перед квадратом стоит коэффициент

А что делать, если перед квадратом стоит число? Например:

$$4x^2 - 9$$

Давайте разберёмся. $4x^2$ — это $(2x)^2$, потому что $(2x)^2 = 4x^2$. А 9 — это 3^2. Значит, у нас разность квадратов: $(2x)^2 - 3^2$.

Применяем формулу, где $a = 2x$, $b = 3$:

$$4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$$

Пример 5

Дроби

Рассмотрим пример с дробями. Пусть нам нужно разложить:

$$z^2 - \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{4}$ — это $\left(\frac{1}{2}\right)^2$. Значит:

$$z^2 - \frac{1}{4} = z^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

Пример 6

Дроби в обоих слагаемых

Теперь пример посложнее, где дроби стоят в обоих слагаемых:

$$\frac{4}{9}x^2 - \frac{9}{16}$$

Давайте разбираться по частям. $\frac{4}{9}x^2$ — это $\left(\frac{2}{3}x\right)^2$, потому что $\left(\frac{2}{3}x\right)^2 = \frac{4}{9}x^2$. А $\frac{9}{16}$ — это $\left(\frac{3}{4}\right)^2$, так как $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

Значит, у нас разность квадратов: $\left(\frac{2}{3}x\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$. Применяем формулу:

$$\frac{4}{9}x^2 - \frac{9}{16} = \left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}\right)$$

Пример 7

Степени больше 2

Давайте разберём пример, в котором буквы стоят в разных степенях. Пусть нам нужно разложить на множители:

$$x^4 - 16$$

Давайте подумаем, как представить x^4 в виде квадрата. x^4 — это $(x^2)^2$, потому что $(x^2)^2 = x^4$. 16 — это 4^2. Значит, у нас разность квадратов: $(x^2)^2 - 4^2$.

Применяем формулу:

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4)$$

Но посмотрите: первая скобка $(x^2 - 4)$ — это тоже разность квадратов! $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$. А вторая скобка $(x^2 + 4)$ на множители не раскладывается (сумма квадратов формулой не раскладывается).

Записываем окончательный ответ:

$$x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

Пример 8

Степени и коэффициенты

А теперь рассмотрим случай, в котором и коэффициенты, и степени повыше. Разложим на множители:

$$16x^4 - 81y^4$$

Давайте разбираться по частям. $16x^4$ — это $(4x^2)^2$, потому что $(4x^2)^2 = 16x^4$. $81y^4$ — это $(9y^2)^2$, так как $(9y^2)^2 = 81y^4$.

Значит, у нас разность квадратов: $(4x^2)^2 - (9y^2)^2$. Применяем формулу:

$$16x^4 - 81y^4 = (4x^2 - 9y^2)(4x^2 + 9y^2)$$

Но посмотрите: первая скобка $(4x^2 - 9y^2)$ — это тоже разность квадратов! $4x^2 = (2x)^2$, $9y^2 = (3y)^2$. Значит:

$$4x^2 - 9y^2 = (2x - 3y)(2x + 3y)$$

Вторая скобка $(4x^2 + 9y^2)$ на множители не раскладывается.

Записываем окончательный ответ:

$$16x^4 - 81y^4 = (2x - 3y)(2x + 3y)(4x^2 + 9y^2)$$

Пример 9

Без двойного разложения

А теперь рассмотрим случай, в котором двойное разложение будет не возможно. Пусть у нас есть следующее выражение:

$$9x^4 - 25y^2$$

Смотрим: $9x^4$ — это $(3x^2)^2$, потому что $(3x^2)^2 = 9x^4$. $25y^2$ — это $(5y)^2$. Значит:

$$9x^4 - 25y^2 = (3x^2)^2 - (5y)^2 = (3x^2 - 5y)(3x^2 + 5y)$$

Дальше раскладывать ничего нельзя.

Пример 10

Разность квадратов в произведении

Иногда формулу нужно применить не к одному выражению, а к его части. Например:

$$(x + 1)^2 - 9$$

Здесь первое слагаемое — квадрат выражения $(x+1)$, второе — квадрат числа 3. Применяем формулу, где $a = x + 1$, $b = 3$:

$$(x + 1)^2 - 9 = ((x + 1) - 3)((x + 1) + 3)$$

Упрощаем скобки:

$$(x + 1)^2 - 9 = (x - 2)(x + 4)$$

Пример 11

Разность квадратов и вынесение множителя

Иногда перед применением формулы нужно сначала вынести общий множитель. Например:

$$2x^2 - 50$$

Сначала заметим, что оба слагаемых делятся на 2. Вынесем 2 за скобки:

$$2x^2 - 50 = 2(x^2 - 25)$$

А теперь в скобках у нас разность квадратов: $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$. Получаем:

$$2x^2 - 50 = 2(x - 5)(x + 5)$$

Задачи

1. Разложите на множители:

1) $x^2 - 4$	**3)** $y^2 - 16$	**5)** $m^2 - 36$	**7)** $p^2 - 64$
2) $a^2 - 9$	**4)** $b^2 - 25$	**6)** $n^2 - 49$	**8)** $q^2 - 81$

9) x^2-100 10) a^2-121 11) y^2-144 12) b^2-169

2. Разложите на множители:

1) $4x^2-9$
2) $9a^2-16$
3) $16y^2-25$
4) $25b^2-36$
5) $36m^2-49$
6) $49n^2-64$
7) $64p^2-81$
8) $81q^2-100$
9) $100x^2-121$
10) $121a^2-144$
11) $144y^2-169$
12) $169b^2-196$

3. Разложите на множители:

1) x^4-1
2) a^4-16
3) y^4-81
4) b^4-256
5) x^6-1
6) a^6-64
7) y^6-729
8) x^8-1
9) x^4-y^4
10) a^4-b^4
11) m^4-n^4
12) x^6-y^6

4. Разложите на множители:

1) $x^2-\frac{1}{4}$
2) $a^2-\frac{1}{9}$
3) $y^2-\frac{1}{16}$
4) $b^2-\frac{4}{9}$
5) $m^2-\frac{9}{16}$
6) $n^2-\frac{16}{25}$
7) $\frac{4}{9}x^2-\frac{1}{4}$
8) $\frac{9}{16}a^2-\frac{4}{9}$
9) $\frac{16}{25}y^2-\frac{9}{16}$
10) $0.25x^2-0.01$
11) $0.36a^2-0.49$
12) $1.44b^2-0.09$

5. Разложите на множители:

1) $(x+1)^2-4$
2) $(a-2)^2-9$
3) $(y+3)^2-16$
4) $(b-4)^2-25$
5) $(2x+1)^2-9$
6) $(3a-2)^2-16$
7) $(4y+3)^2-25$
8) $(5b-4)^2-36$
9) $x^2-(y+1)^2$
10) $a^2-(b-2)^2$
11) $(x+y)^2-z^2$
12) $(a+b)^2-(c-d)^2$

6. Разложите на множители:

1) $2x^2-8$
2) $3a^2-27$
3) $5y^2-45$
4) $4b^2-36$
5) $8m^2-32$
6) $12n^2-48$
7) $18x^2-50$
8) $20a^2-45$
9) $24y^2-54$
10) $28b^2-63$
11) $32p^2-72$
12) $50q^2-98$

Квадрат суммы и квадрат разности

Теория

Теперь познакомимся с формулами квадрата суммы и квадрата разности. Они очень похожи, поэтому их часто запоминают вместе.

Как это записывают:

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

$$\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Читается так: квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого плюс удвоенное произведение первого на второе плюс квадрат второго. Для разности то же самое, но со знаком минус перед удвоенным произведением.

Эти формулы работают и в обратную сторону: если вы видите три слагаемых, два из которых — квадраты, а третье — удвоенное произведение, то это можно свернуть в квадрат суммы или разности. Другими словами, с помощью этих формул мы раскладываем трёхчлен на множители, собирая из него полный квадрат.

Пример 1

Квадрат суммы двух букв

Рассмотрим самый простой случай. Пусть нам нужно разложить на множители:

$$x^2 + 2xy + y^2$$

Давайте посмотрим на это выражение. Первое слагаемое x^2 — это квадрат x. Последнее слагаемое y^2 — это квадрат y. А среднее слагаемое $2xy$ — это удвоенное произведение x и y ($2 \cdot x \cdot y$). Значит, перед нами квадрат суммы x и y:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

Пример 2

Квадрат разности двух букв

Теперь разберём похожий пример, но со знаком минус:

$$a^2 - 2ab + b^2$$

Первое слагаемое a^2 — квадрат a, последнее b^2 — квадрат b, среднее $-2ab$ — это удвоенное произведение a и b со знаком минус. Значит, это квадрат разности:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Пример 3

Квадрат суммы числа и буквы

Разложим на множители:

$$x^2 + 6x + 9$$

Давайте разбираться. x^2 — это квадрат x. 9 — это квадрат числа 3 ($3^2 = 9$). А $6x$ — это удвоенное произведение x и 3? Проверим: $2 \cdot x \cdot 3 = 6x$. Да, точно! Значит, это квадрат суммы x и 3:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

Пример 4

Квадрат разности числа и буквы

А теперь пример с минусом:

$$y^2 - 10y + 25$$

y^2 — квадрат y, 25 — квадрат 5 ($5^2 = 25$). Проверяем среднее слагаемое: $2 \cdot y \cdot 5 = 10y$, но у нас стоит минус, значит это квадрат разности:

$$y^2 - 10y + 25 = (y - 5)^2$$

Пример 5

Когда перед буквой стоит коэффициент

Рассмотрим пример, в котором перед буквой стоит число. Разложим на множители:

$$4x^2 + 12x + 9$$

Здесь первое слагаемое $4x^2$ — это $(2x)^2$, потому что $(2x)^2 = 4x^2$. Последнее слагаемое 9 — это 3^2. Проверяем среднее: $2 \cdot (2x) \cdot 3 = 12x$. Всё сходится. Значит:

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$$

Пример 6

Квадрат разности с коэффициентами

А теперь похожий пример, но с минусом:

$$9a^2 - 24a + 16$$

$9a^2$ — это $(3a)^2$, 16 — это 4^2. Проверяем среднее: $2 \cdot (3a) \cdot 4 = 24a$, а у нас минус, значит:

$$9a^2 - 24a + 16 = (3a - 4)^2$$

Пример 7

Вынесение минуса

Рассмотрим случай, когда перед первым слагаемым стоит минус. Разложим на множители:

$$-x^2 + 4x - 4$$

Здесь минус перед x^2 мешает. Вынесем его за скобки:

$$-x^2 + 4x - 4 = -(x^2 - 4x + 4)$$

А в скобке $x^2 - 4x + 4$ — это квадрат разности: $(x - 2)^2$. Значит:

$$-x^2 + 4x - 4 = -(x - 2)^2$$

Пример 8

Перепутанные слагаемые

Бывает так, что слагаемые стоят не по порядку. Например:

$$9 + 6x + x^2$$

Здесь квадраты стоят по краям: 9 — это 3^2, x^2 — это квадрат x. А в середине $6x$ — это удвоенное произведение 3 и x. Значит, это квадрат суммы, просто слагаемые переставлены:

$$9 + 6x + x^2 = (3 + x)^2 = (x + 3)^2$$

Пример 9

Дроби в квадрате суммы

Рассмотрим пример с дробями. Разложим на множители:

$$x^2 + x + \frac{1}{4}$$

Давайте разбираться. x^2 — это квадрат x. $\frac{1}{4}$ — это квадрат $\frac{1}{2}$, потому что $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Проверяем среднее слагаемое: $2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} = x$. Всё сходится. Значит, это квадрат суммы:

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

Пример 10

Дроби в квадрате разности

Теперь пример с минусом и дробями:

$$a^2 - \frac{2}{3}a + \frac{1}{9}$$

a^2 — квадрат a. $\frac{1}{9}$ — это квадрат $\frac{1}{3}$. Проверяем среднее: $2 \cdot a \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}a$, и перед ним стоит минус. Значит, это квадрат разности:

$$a^2 - \frac{2}{3}a + \frac{1}{9} = \left(a - \frac{1}{3}\right)^2$$

Пример 11

Дроби с коэффициентами

Рассмотрим пример, в котором дроби стоят и перед квадратом, и в среднем слагаемом. Разложим на множители:

$$\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$$

$\frac{4}{9}x^2$ — это $\left(\frac{2}{3}x\right)^2$. 1 — это 1^2. Проверяем среднее: $2 \cdot \frac{2}{3}x \cdot 1 = \frac{4}{3}x$. Всё совпадает. Значит:

$$\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 1 = \left(\frac{2}{3}x + 1\right)^2$$

Пример 12

Десятичные дроби

Разложим на множители:

$$y^2 - 0.6y + 0.09$$

0.09 — это 0.3^2. Проверяем среднее: $2 \cdot y \cdot 0.3 = 0.6y$, и перед ним минус. Значит:

$$y^2 - 0.6y + 0.09 = (y - 0.3)^2$$

Пример 13

Четвёртая степень

Рассмотрим теперь пример, в котором у нас четвёртые степени. Разложим на множители:

$$x^4 + 2x^2 + 1$$

Давайте посмотрим внимательно. x^4 — это $(x^2)^2$, 1 — это 1^2, а среднее слагаемое $2x^2$ — это удвоенное произведение x^2 и 1. Значит, это квадрат суммы x^2 и 1:

$$x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$$

Пример 14

Четвёртая степень с минусом

А теперь с минусом:

$$a^4 - 4a^2 + 4$$

a^4 — это $(a^2)^2$, 4 — это 2^2, среднее слагаемое $-4a^2$ — это удвоенное произведение a^2 и 2 со знаком минус. Значит:

$$a^4 - 4a^2 + 4 = (a^2 - 2)^2$$

Пример 15

Четвёртая степень с коэффициентами

Разложим на множители:

$$4x^4 + 4x^2 + 1$$

$4x^4$ — это $(2x^2)^2$, 1 — это 1^2, среднее слагаемое $4x^2$ — это удвоенное произведение $2x^2$ и 1. Значит:

$$4x^4 + 4x^2 + 1 = (2x^2 + 1)^2$$

Пример 16

Четвёртая степень с коэффициентами и минусом

И ещё один похожий пример:

$$9a^4 - 12a^2 + 4$$

$9a^4$ — это $(3a^2)^2$, 4 — это 2^2, среднее слагаемое $-12a^2$ — это удвоенное произведение $3a^2$ и 2 со знаком минус. Получаем:

$$9a^4 - 12a^2 + 4 = (3a^2 - 2)^2$$

Пример 17

Квадрат суммы трёхчлена

Разложим на множители:

$$(x + 1)^2 + 2(x + 1) + 1$$

Здесь можно сделать замену. Пусть $t = x + 1$. Тогда выражение примет вид:

$$t^2 + 2t + 1$$

А это квадрат суммы t и 1: $t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2$. Возвращаем обратно замену:

$$(x + 1)^2 + 2(x + 1) + 1 = ((x + 1) + 1)^2 = (x + 2)^2$$

Задачи

1. Разложите на множители:

1) $x^2 + 2x + 1$ **4)** $b^2 + 8b + 16$ **7)** $p^2 + 14p + 49$ **10)** $a^2 + 20a + 100$

2) $a^2 + 4a + 4$ **5)** $m^2 + 10m + 25$ **8)** $q^2 + 16q + 64$ **11)** $y^2 + 22y + 121$

3) $y^2 + 6y + 9$ **6)** $n^2 + 12n + 36$ **9)** $x^2 + 18x + 81$ **12)** $b^2 + 24b + 144$

2. Разложите на множители:

1) $x^2 - 2x + 1$ **4)** $b^2 - 8b + 16$ **7)** $p^2 - 14p + 49$ **10)** $a^2 - 20a + 100$

2) $a^2 - 4a + 4$ **5)** $m^2 - 10m + 25$ **8)** $q^2 - 16q + 64$ **11)** $y^2 - 22y + 121$

3) $y^2 - 6y + 9$ **6)** $n^2 - 12n + 36$ **9)** $x^2 - 18x + 81$ **12)** $b^2 - 24b + 144$

3. Разложите на множители:

1) $4x^2+4x+1$

2) $9a^2+6a+1$

3) $16y^2+8y+1$

4) $25b^2+10b+1$

5) $4x^2-4x+1$

6) $9a^2-6a+1$

7) $16y^2-8y+1$

8) $25b^2-10b+1$

9) $9x^2+12x+4$

10) $16a^2+24a+9$

11) $25y^2+20y+4$

12) $36b^2+12b+1$

4. Разложите на множители:

1) $-x^2+4x-4$

2) $-a^2-6a-9$

3) $-y^2+10y-25$

4) $-4x^2+4x-1$

5) $-9a^2+12a-4$

6) $-16y^2+8y-1$

7) $16+8x+x^2$

8) $25-10a+a^2$

9) $49+14y+y^2$

10) $36-12b+b^2$

11) $81+18m+m^2$

12) $64-16n+n^2$

5. Разложите на множители:

1) $x^2+x+\frac{1}{4}$

2) $a^2-a+\frac{1}{4}$

3) $y^2+\frac{1}{3}y+\frac{1}{36}$

4) $b^2-\frac{1}{2}b+\frac{1}{16}$

5) $m^2+\frac{2}{5}m+\frac{1}{25}$

6) $n^2-\frac{3}{4}n+\frac{9}{64}$

7) $\frac{1}{9}x^2+\frac{2}{3}x+1$

8) $\frac{4}{25}a^2-\frac{4}{5}a+1$

9) $\frac{9}{16}y^2+\frac{3}{2}y+1$

10) $x^2+0.2x+0.01$

11) $a^2-0.4a+0.04$

12) $y^2+0.6y+0.09$

6. Разложите на множители:

1) x^4+2x^2+1

2) a^4-2a^2+1

3) y^4+4y^2+4

4) b^4-6b^2+9

5) m^4+8m^2+16

6) n^4-10n^2+25

7) $4x^4+4x^2+1$

8) $9a^4-6a^2+1$

9) $16y^4+8y^2+1$

10) $25b^4-10b^2+1$

11) $36m^4+12m^2+1$

12) $49n^4-14n^2+1$

7. Разложите на множители:

1) $(x+1)^2+2(x+1)+1$

2) $(a-2)^2-4(a-2)+4$

3) $(y+3)^2+6(y+3)+9$

4) $(b-4)^2-8(b-4)+16$

5) $(2x+1)^2+4(2x+1)+4$

6) $(3a-2)^2-6(3a-2)+9$

7) $(4y+3)^2+8(4y+3)+16$

8) $(5b-4)^2-10(5b-4)+25$

9) $(x-1)^2-2(x-1)+1$

10) $(a+2)^2+4(a+2)+4$

11) $(y-3)^2-6(y-3)+9$

12) $(b+4)^2+8(b+4)+16$

8. Разложите на множители:

1) $4x^2+4xy+y^2$

2) $9+6x+x^2$

3) a^4-2a^2+1

4) $(y+3)^2+6(y+3)+9$

5) $25-10a+a^2$

6) $16m^2+8mn+n^2$

7) $x^2+x+\frac{1}{4}$

8) $49+14y+y^2$

9) $9a^2-6ab+b^2$

10) $(a-2)^2-4(a-2)+4$

11) y^4+4y^2+4

12) $b^2-\frac{1}{2}b+\frac{1}{16}$

13) $36-12b+b^2$

14) $25x^2-10xy+y^2$

15) $-x^2+4x-4$

16) $(2x+1)^2+4(2x+1)+4$

17) $m^2+\frac{2}{5}m+\frac{1}{25}$

18) $64+16p+p^2$

19) $49m^2-14mn+n^2$

20) $a^2-0.4a+0.04$

21) $16+8x+x^2$

22) $4x^4+4x^2+1$

23) $(3a-2)^2-6(3a-2)+9$

24) $81-18b+b^2$

25) $y^2+0.6y+0.09$

26) $36a^2+12ab+b^2$

27) $\frac{1}{9}x^2+\frac{2}{3}x+1$

28) $100+20x+x^2$

29) b^4-6b^2+9

30) $(b-4)^2-8(b-4)+16$

31) $-4x^2+4x-1$

32) $121-22a+a^2$

33) $64p^2+16pq+q^2$

34) $x^2-0.2x+0.01$

35) $49+14m+m^2$

36) $9a^4-6a^2+1$

37) $(4y+3)^2+8(4y+3)+16$

38) $144-24b+b^2$

39) $81a^2-18ab+b^2$

40) $\frac{4}{25}a^2-\frac{4}{5}a+1$

41) $25+10y+y^2$

42) $16y^4+8y^2+1$

43) $(5b-4)^2-10(5b-4)+25$

44) $-9a^2+12a-4$

45) $169-26n+n^2$

46) $100x^2+20xy+y^2$

47) $a^2-a+\frac{1}{4}$

48) $36+12p+p^2$

49) $25b^4-10b^2+1$

50) $(6m+5)^2+12(6m+5)+36$

51) x^6+2x^3+1

52) $4+4x+x^2$

53) $121m^2-22mn+n^2$

54) $\frac{9}{16}y^2+\frac{3}{2}y+1$

55) $-16y^2+8y-1$

56) $(x-1)^2-2(x-1)+1$

57) $64-16b+b^2$

58) $36m^4+12m^2+1$

59) $n^2-\frac{3}{4}n+\frac{9}{64}$

60) $9+6a+a^2$

61) $49n^4-14n^2+1$

62) $(7n-6)^2-14(7n-6)+49$

63) a^6-2a^3+1

64) $100-20x+x^2$

65) $144a^2+24ab+b^2$

66) $p^2+\frac{4}{7}p+\frac{4}{49}$

67) $(a+2)^2+4(a+2)+4$

68) $4x^6+4x^3+1$

69) $81+18y+y^2$

70) $25x^4-10x^2+1$

71) $q^2-\frac{5}{8}q+\frac{25}{64}$

72) $16+8a+a^2$

73) $(2x-1)^2-4(2x-1)+4$

74) y^8+4y^4+4

75) $121-22m+m^2$

76) $169a^2-26ab+b^2$

77) $\frac{16}{49}b^2-\frac{8}{7}b+1$

78) $(y-3)^2-6(y-3)+9$

79) $9a^6-6a^3+1$

80) $36+12y+y^2$

81) x^8+2x^4+1

82) $m^2+1.2m+0.36$

83) $49+14p+p^2$

84) $(3a+2)^2+6(3a+2)+9$

85) $16y^8+8y^4+1$

86) $64-16a+a^2$

87) $\frac{25}{36}m^2+\frac{5}{3}m+1$

88) a^8-2a^4+1

89) $n^2-1.4n+0.49$

90) $(b+4)^2+8(b+4)+16$

91) $4+4a+a^2$

92) $36y^4+12y^2+1$

93) $p^2+1.6p+0.64$

94) $9+6y+y^2$

95) $q^2-1.8q+0.81$

96) $b^2-0.8b+0.16$

97) $25+10a+a^2$

98) $64a^4+16a^2+1$

99) $(4x-3)^2-8(4x-3)+16$

100) $y^2+\frac{1}{3}y+\frac{1}{36}$

101) $16+8m+m^2$

102) $\frac{36}{49}n^2-\frac{12}{7}n+1$

Практика на изученные приемы

Теория

Мы изучили несколько способов разложения на множители:

- вынесение общего множителя;
- метод группировки;
- разность квадратов;
- квадрат суммы и квадрат разности.

Когда вы точно знаете, каким способом решать пример, это довольно легко. Но в жизни никто не подсказывает, какой способ применить. Вы просто видите выражение и должны сами определить, как его раскладывать.

В этой главе собраны задачи на все пройденные темы. Они идут вперемешку. Ваша задача — посмотреть на выражение, понять, какой способ подходит, и применить его. Иногда можно решить разными способами — выбирайте тот, который кажется удобнее.

Задачи

1. Разложите на множители:

1) $7a + 7b$ **2)** $x^2 - 4$ **3)** $x^2 + 2x + 1$ **4)** $ax + ay + bx + by$ **5)** $5m - 5n$ **6)** $a^2 - 9$ **7)** $y^2 - 6y + 9$ **8)** $3x + 3y + ax + ay$ **9)** $12x - 12y$ **10)** $4a^2 - 1$ **11)** $m^2 + 4m + 4$ **12)** $ab - ac + db - dc$

2. Разложите на множители:

1) $x^2 + x$ **2)** $16 - y^2$ **3)** $a^2 - 8a + 16$ **4)** $2x + 2y + mx + my$ **5)** $a^3 - a^2$ **6)** $25x^2 - 4$ **7)** $b^2 + 10b + 25$ **8)** $ax - ay - bx + by$ **9)** $m^5 + m^3$ **10)** $49 - a^2$ **11)** $x^2 - 14x + 49$ **12)** $3a - 3b + ma - mb$

3. Разложите на множители:

1) $8a^2 + 4a$ **2)** $x^2 - y^2$ **3)** $9x^2 + 6x + 1$ **4)** $x^2 + xy + xz + yz$ **5)** $15x^3 - 5x^2$ **6)** $36 - m^2$ **7)** $4a^2 - 4a + 1$ **8)** $ab + ac - b^2 - bc$ **9)** $12y^4 + 18y^3$ **10)** $81x^2 - 1$ **11)** $16y^2 + 8y + 1$ **12)** $2x^2 + 2xy + 3x + 3y$

4. Разложите на множители:

1) $10a^3b + 15a^2b^2$ **2)** $a^4 - 1$ **3)** $25x^2 + 20x + 4$ **4)** $am + an + bm + bn$ **5)** $24x^2y^3 - 18x^3y^2$ **6)** $16x^4 - 81$ **7)** $9a^2 - 12a + 4$ **8)** $x^3 + x^2 + x + 1$ **9)** $18a^3b^2c + 27a^2b^3c$ **10)** $0.25x^2 - 0.49$ **11)** $0.09a^2 + 0.6a + 1$ **12)** $5x(2a - 3) + 7y(2a - 3)$

5. Разложите на множители:

1) $16x^3y^2 + 24x^2y^3$ **2)** $x^4 - 16y^4$ **3)** $36a^2 + 12ab + b^2$ **4)** $3x^3 - 3x^2 + 5x - 5$ **5)** $25m^5n^4 + 35m^4n^5$ **6)** $49a^2 - 9b^2$

7) $64x^2 - 16xy + y^2$

8) $2a^2 + 2ab + 3a + 3b$

9) $\frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{4}$

10) $\frac{9}{16}a^2 + \frac{3}{2}a + 1$

11) $x(a+b) - y(a+b)$

12) $3a(m-n) + 5b(m-n) - 2(m-n)$

6. Разложите на множители:

1) $32a^4b^3 - 48a^3b^4$

2) $x^6 - 64$

3) $49m^2 - 28mn + 4n^2$

4) $2x^3 - 2x^2 + 3x - 3$

5) $54p^7q^6 - 36p^6q^7$

6) $81x^4 - 16y^4$

7) $100a^2 + 20ab + b^2$

8) $5a^2 - 5ab + 2a - 2b$

9) $36x^4y^3z^2 - 48x^3y^4z^2$

10) $(x+2)^2 - 9$

11) $(a-3)^2 - 4b^2$

12) $8a(3b+2) - 5(3b+2)$

7. Разложите на множители:

1) $45x^5y^4 - 30x^4y^5$

2) $x^8 - 1$

3) $16a^2 - 24ab + 9b^2$

4) $12a^3b^2 + 18a^2b^3 - 24a^2b^2$

5) $36m^6n^5 - 48m^5n^6$

6) $0.01x^2 - 0.09y^2$

7) $1.44a^2 - 2.4ab + b^2$

8) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

9) $28a^5b^4 - 42a^4b^5 + 56a^4b^4$

10) $25 - (x+1)^2$

11) $49a^2 - (b-3)^2$

12) $9x(2y+1) - 4(2y+1) + 5x(2y+1)$

8. Разложите на множители:

1) $64x^7y^6z^5 + 80x^6y^7z^5$

2) $a^6 - b^6$

3) $25a^2 + 30ab + 9b^2 - 16c^2$

4) $2x^3 + 2x^2y + 3x^2 + 3xy$

5) $81p^8q^7r^6 - 99p^7q^8r^6$

6) $\frac{16}{25}x^2 - \frac{9}{16}y^2$

7) $\frac{25}{36}m^2 + \frac{5}{3}m + 1 - n^2$

8) $x^4 - 2x^2 + 1 - y^2$

9) $4a^4 - 4a^2 + 1 - 9b^2$

10) $(2x+1)^2 - (x-3)^2$

11) $(3a-2)^2 - (2a+1)^2$

12) $6a(2b-1) + 9(2b-1) - 4a(2b-1)$

9. Разложите на множители:

1) $96m^9n^8p^7q^6r^5 - 84m^8n^9p^7q^6r^5$

2) $x^{10} - y^{10}$

3) $36x^2 - 12xy + y^2 - 25z^2$

4) $4a^3 - 4a^2b + 6a^2 - 6ab$

5) $75a^7b^6c^5d^4e^3 - 60a^6b^7c^5d^4e^3$

6) $0.04x^2 - 0.09y^2 + 0.25z^2$

7) $\frac{9}{49}a^2 - \frac{4}{25}b^2 + \frac{6}{35}ab$

8) $x^4 + 4x^2 + 4 - 9y^2$

9) $16a^4 + 8a^2 + 1 - 25b^2$

10) $(x+2)^2 - (y-3)^2$

11) $(2a+3)^2 - (3b-1)^2$

12) $8x(3y-2) + 12(3y-2) - 5x(3y-2) + 7(3y-2)$

Комбинации изученных приемов

Теория

Мы уже умеем раскладывать на множители разными способами:

- вынесение общего множителя;
- метод группировки;
- разность квадратов;
- квадрат суммы и квадрат разности.

В реальных примерах редко бывает достаточно одного действия. Часто приходится применять несколько способов подряд: сначала вынести общий множитель, а потом посмотреть — может быть, то, что осталось в скобках, раскладывается по формуле или группируется дальше.

В этой главе мы будем учиться комбинировать разные приёмы. Это как собирать конструктор — сначала делаем одно, потом другое, и получаем красивое разложение.

Пример 1

Сначала общий множитель, потом разность квадратов

Давайте рассмотрим пример, в котором сначала нужно вынести общий числовой множитель, а потом применить формулу разности квадратов:

$$2x^2 - 8$$

Первое, что бросается в глаза — оба числа делятся на 2. Вынесем 2 за скобки:

$$2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4)$$

А теперь посмотрим на скобку $x^2 - 4$. Это же разность квадратов! $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Значит:

$$2x^2 - 8 = 2(x - 2)(x + 2)$$

Вот мы и применили два способа: сначала вынесли общий множитель, потом использовали формулу разности квадратов.

Пример 2

Сначала общий множитель, потом квадрат разности

Давайте рассмотрим пример, в котором после вынесения общего множителя получается квадрат разности:

$$3a^2 - 6a + 3$$

Замечаем, что все коэффициенты делятся на 3. Выносим 3:

$$3a^2 - 6a + 3 = 3(a^2 - 2a + 1)$$

А в скобке у нас знакомое выражение $a^2 - 2a + 1$. Это же квадрат разности: $a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2$. Получаем:

$$3a^2 - 6a + 3 = 3(a - 1)^2$$

Пример 3

Сначала общий множитель, потом квадрат суммы

Давайте рассмотрим похожий пример, но с плюсом:

$$5x^2 + 10x + 5$$

Выносим общий множитель 5:

$$5x^2 + 10x + 5 = 5(x^2 + 2x + 1)$$

А в скобке $x^2 + 2x + 1$ — это квадрат суммы: $(x + 1)^2$. Значит:

$$5x^2 + 10x + 5 = 5(x + 1)^2$$

Пример 4

Сначала общий множитель, потом разность квадратов с коэффициентами

Давайте рассмотрим пример, где сначала нужно вынести общий множитель, содержащий букву:

$$4x^3 - 36x$$

Давайте посмотрим, что общего у этих слагаемых. И 4, и 36 делятся на 4, и в каждом есть x. Вынесем $4x$ за скобки:

$$4x^3 - 36x = 4x(x^2 - 9)$$

В скобке $x^2 - 9$ — разность квадратов: $(x - 3)(x + 3)$. Получаем:

$$4x^3 - 36x = 4x(x - 3)(x + 3)$$

Пример 5

Сначала общий множитель, потом группировка

Давайте рассмотрим пример, в котором после вынесения общего множителя нужно будет применить группировку:

$$2ax + 2ay + 2bx + 2by$$

Сначала вынесем общий множитель 2:

$$2(ax + ay + bx + by)$$

А теперь в скобках у нас выражение, которое можно сгруппировать. Давайте это сделаем:

$$ax + ay + bx + by = (ax + ay) + (bx + by) = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$$

Значит, исходное выражение раскладывается так:

$$2ax + 2ay + 2bx + 2by = 2(x + y)(a + b)$$

Пример 6

Сначала группировка, потом разность квадратов

Давайте рассмотрим выражение, в котором четыре слагаемых и нужно сначала заметить квадрат разности в трёх из них:

$$x^2 - 4x + 4 - y^2$$

Давайте посмотрим внимательно. Первые три слагаемых $x^2 - 4x + 4$ — это квадрат разности: $(x - 2)^2$. Тогда всё выражение можно переписать так:

$$x^2 - 4x + 4 - y^2 = (x - 2)^2 - y^2$$

А это разность квадратов! Применяем формулу:

$$(x - 2)^2 - y^2 = ((x - 2) - y)((x - 2) + y) = (x - 2 - y)(x - 2 + y)$$

Пример 7

Сначала группировка, потом общий множитель, потом разность квадратов

Давайте рассмотрим пример, где потребуется несколько шагов:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4$$

Попробуем сгруппировать первые два и последние два слагаемых:

$$(x^3 - x^2) + (-4x + 4)$$

В первой группе выносим x^2, во второй замечаем, что можно вынести -4:

$$x^2(x - 1) - 4(x - 1)$$

Отлично! У нас появилась общая скобка $(x-1)$. Выносим её:

$$(x-1)(x^2-4)$$

А x^2-4 — это разность квадратов. Раскладываем дальше:

$$x^2-4=(x-2)(x+2)$$

В итоге получаем:

$$x^3-x^2-4x+4=(x-1)(x-2)(x+2)$$

Пример 8

Сначала вынесение минуса, потом квадрат суммы

Давайте рассмотрим случай, когда перед первым слагаемым стоит минус:

$$-x^2-6x-9$$

Давайте вынесем минус за скобки:

$$-x^2-6x-9=-(x^2+6x+9)$$

В скобке x^2+6x+9 — это квадрат суммы: $(x+3)^2$. Значит:

$$-x^2-6x-9=-(x+3)^2$$

Пример 9

Общий множитель и формула с четвёртыми степенями

Давайте рассмотрим пример с четвёртыми степенями:

$$5x^4-80$$

Сначала вынесем общий множитель 5:

$$5(x^4-16)$$

А x^4-16 — это разность квадратов, потому что $x^4=(x^2)^2$, а $16=4^2$. Раскладываем:

$$x^4-16=(x^2-4)(x^2+4)$$

Но x^2-4 — это тоже разность квадратов! Раскладываем дальше:

$$x^2-4=(x-2)(x+2)$$

Окончательно получаем:

$$5x^4-80=5(x-2)(x+2)(x^2+4)$$

Пример 10

Сложная комбинация

Давайте рассмотрим пример, где нужно применить несколько способов подряд:

$$2x^3+2x^2y-8x-8y$$

Сгруппируем первые два и последние два слагаемых:

$$(2x^3+2x^2y)+(-8x-8y)$$

В первой группе выносим $2x^2$, во второй выносим -8:

$$2x^2(x+y)-8(x+y)$$

Общая скобка $(x+y)$:

$$(x+y)(2x^2-8)$$

Теперь во второй скобке выносим общий множитель 2:

$$(x+y)\cdot 2(x^2-4)$$

А x^2-4 — разность квадратов:

$$2(x+y)(x-2)(x+2)$$

Задачи

1. Разложите на множители:

1) $2x^2-8$
2) $3a^2-27$
3) $5y^2-45$
4) $4b^2-36$
5) $2x^2+4x+2$
6) $3a^2-6a+3$
7) $5y^2+10y+5$
8) $4b^2-8b+4$
9) $8m^2-32$
10) $12n^2-48$
11) $6x^2+12x+6$
12) $7a^2-14a+7$

2. Разложите на множители:

1) $4x^3-36x$
2) $9a^3-81a$
3) $16y^3-64y$
4) $25b^3-100b$
5) $2x^3+4x^2+2x$
6) $3a^3-6a^2+3a$
7) $5y^3+10y^2+5y$
8) $4b^3-8b^2+4b$
9) $8x^3-32x$
10) $12a^3-48a$
11) $6x^3+12x^2+6x$
12) $7a^3-14a^2+7a$

3. Разложите на множители:

1) $2ax+2ay+2bx+2by$
2) $3mx+3my+3nx+3ny$
3) $4pa+4pb+4qa+4qb$
4) $5x^2-5xy+5xz-5yz$
5) $6a^2-6ab+6ac-6bc$
6) $7m^2-7mn+7mp-7np$
7) $2x^3+2x^2+2x+2$
8) $3a^3-3a^2+3a-3$
9) $4y^3+4y^2-4y-4$

4. Разложите на множители:

1) $x^2-4x+4-y^2$
2) $a^2-6a+9-b^2$
3) $m^2-10m+25-n^2$
4) $x^2-2xy+y^2-1$
5) $a^2-2ab+b^2-4$
6) $m^2-2mn+n^2-9$
7) $4x^2-4x+1-9y^2$
8) $9a^2-6a+1-16b^2$
9) $16m^2-8m+1-25n^2$

5. Разложите на множители:

1) x^3-x^2-4x+4
2) a^3-a^2-9a+9
3) $m^3-m^2-16m+16$
4) x^3+x^2-4x-4
5) a^3+a^2-9a-9
6) $y^3+y^2-16y-16$
7) $2x^3-2x^2-8x+8$
8) $3a^3-3a^2-12a+12$
9) $4b^3-4b^2-36b+36$

6. Разложите на множители:

1) $5x^4-80$
2) $6a^4-96$
3) $7y^4-112$
4) $2x^4-32$
5) $3a^4-48$
6) $4b^4-64$
7) $x^4-2x^2+1-y^2$
8) $a^4-4a^2+4-b^2$
9) $m^4-6m^2+9-n^2$

7. Разложите на множители:

1) $2x^3+2x^2y-8x-8y$
2) $3a^3+3a^2b-12a-12b$
3) $4m^3+4m^2n-16m-16n$
4) $2x^3-2x^2y-8x+8y$
5) $3a^3-3a^2b-12a+12b$
6) $4m^3-4m^2n-16m+16n$
7) $5x^3+5x^2y-20x-20y$
8) $6a^3+6a^2b-24a-24b$
9) $7p^3+7p^2q-28p-28q$

8. Разложите на множители:

1) $3a^4-6a^2+3-3b^2$
2) $5x^4-10x^2+5-5y^2$
3) $4m^4-8m^2+4-4n^2$
4) $2x^4+4x^2+2-2y^2$
5) $6a^4+12a^2+6-6b^2$
6) $8b^4+16b^2+8-8c^2$

7) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - z^2$

8) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - c^2$

9) $m^4 - 2m^2n^2 + n^4 - p^2$

9. Разложите на множители:

1) $2x^4 - 18x^2 + 2x^2y - 18y$

2) $3a^4 - 48a^2 + 3a^2b - 48b$

3) $4m^4 - 36m^2 + 4m^2n - 36n$

4) $5x^5 - 5x^3 - 20x^2 + 20$

5) $6a^5 - 6a^3 - 24a^2 + 24$

6) $7y^5 - 7y^3 - 28y^2 + 28$

7) $8x^4 - 8x^2y^2 - 32x^2 + 32y^2$

8) $9a^4 - 9a^2b^2 - 36a^2 + 36b^2$

9) $10m^4 - 10m^2n^2 - 40m^2 + 40n^2$

Разложение кубов

Теория

Мы уже научились работать с квадратами. Теперь перейдём к кубам. Для них тоже есть свои формулы, которые нужно запомнить.

Как это записывают:

$$\mathbf{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$$
$$\mathbf{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

Первая формула — сумма кубов, вторая — разность кубов.

Обратите внимание на знаки во вторых скобках. В сумме кубов стоит минус перед ab, а в разности кубов — плюс. Это часто путают, так что будьте внимательны.

Пример 1

Сумма кубов двух букв

Давайте рассмотрим самый простой случай. Пусть нам нужно разложить на множители:

$$x^3 + y^3$$

Здесь сразу видно, что первое слагаемое — куб x, второе — куб y. Применяем формулу суммы кубов, где $a = x$, $b = y$:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

Пример 2

Разность кубов двух букв

Теперь разберём похожий пример, но с минусом:

$$a^3 - b^3$$

Это разность кубов. Применяем формулу, где $a = a$, $b = b$:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Пример 3

Сумма кубов числа и буквы

Давайте рассмотрим пример, где вместо буквы стоит число:

$$x^3 + 8$$

Заметим, что 8 — это куб числа 2. Значит, у нас сумма кубов: $x^3 + 2^3$. Применяем формулу:

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

Пример 4

Разность кубов числа и буквы

А теперь с минусом:

$$y^3 - 27$$

Очевидно, что 27 — это куб числа 3. Значит, это разность кубов: $y^3 - 3^3$:

$$y^3 - 27 = (y - 3)(y^2 + 3y + 9)$$

Пример 5

Когда перед буквой стоит коэффициент

Давайте рассмотрим пример, в котором перед буквой стоит число:

$$8x^3 + 1$$

Легко заметить, что $8x^3$ — это $(2x)^3$, а 1 — это 1^3. Значит, у нас сумма кубов: $(2x)^3 + 1^3$:

$$8x^3 + 1 = (2x+1)((2x)^2 - (2x)\cdot 1 + 1^2) = (2x+1)(4x^2 - 2x + 1)$$

Пример 6

Разность кубов с коэффициентами

Похожий пример, но с минусом:

$$27a^3 - 64$$

Видим, что $27a^3$ — это $(3a)^3$, а 64 — это 4^3. Значит, это разность кубов:

$$27a^3 - 64 = (3a-4)((3a)^2 + (3a)\cdot 4 + 4^2) = (3a-4)(9a^2 + 12a + 16)$$

Пример 7

Когда буква в шестой степени

Давайте рассмотрим пример, где буква стоит в шестой степени:

$$x^6 - y^6$$

Представим x^6 как $(x^2)^3$, а y^6 — как $(y^2)^3$. Тогда это разность кубов:

$$x^6 - y^6 = (x^2 - y^2)((x^2)^2 + x^2y^2 + (y^2)^2) = (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$$

Но $x^2 - y^2$ — это разность квадратов, которая раскладывается дальше:

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

Значит:

$$x^6 - y^6 = (x-y)(x+y)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$$

Пример 8

Дроби в сумме кубов

Рассмотрим пример с дробями:

$$a^3 + \frac{1}{8}$$

Обратим внимание, что $\frac{1}{8}$ — это $\left(\frac{1}{2}\right)^3$. Значит:

$$a^3 + \frac{1}{8} = \left(a + \frac{1}{2}\right)\left(a^2 - a\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \left(a + \frac{1}{2}\right)\left(a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}\right)$$

Пример 9

Дроби в разности кубов

А теперь пример с минусом и дробями:

$$b^3 - \frac{27}{64}$$

Заметим, что $\frac{27}{64}$ — это $\left(\frac{3}{4}\right)^3$. Значит:

$$b^3 - \frac{27}{64} = \left(b - \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + b\cdot\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) = \left(b - \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + \frac{3}{4}b + \frac{9}{16}\right)$$

Пример 10

Десятичные дроби

Рассмотрим пример с десятичными дробями:

$$x^3 - 0.027$$

Нетрудно заметить, что 0.027 — это 0.3^3. Значит:

$$x^3 - 0.027 = (x - 0.3)(x^2 + 0.3x + 0.09)$$

Пример 11

Сумма кубов с переставленными слагаемыми

Бывает, что слагаемые стоят не по порядку:

$$8 + 27y^3$$

Здесь 8 — это 2^3, а $27y^3$ — это $(3y)^3$. Значит, это сумма кубов:

$$8 + 27y^3 = (2 + 3y)(4 - 6y + 9y^2)$$

Пример 12

Сложный случай с коэффициентами

Давайте рассмотрим пример, где нужно быть внимательным:

$$125x^6 + 64y^3$$

Если внимательно посмотреть, то видно, что $125x^6$ — это $(5x^2)^3$, а $64y^3$ — это $(4y)^3$. Значит:

$$125x^6 + 64y^3 = (5x^2 + 4y)((5x^2)^2 - (5x^2)(4y) + (4y)^2) = (5x^2 + 4y)(25x^4 - 20x^2y + 16y^2)$$

Задачи

1. Разложите на множители:

1) $x^3 + y^3$ **4)** $p^3 - q^3$ **7)** $y^3 + 8$ **10)** $n^3 - 125$

2) $a^3 - b^3$ **5)** $x^3 + 1$ **8)** $b^3 - 27$ **11)** $x^3 + 216$

3) $m^3 + n^3$ **6)** $a^3 - 1$ **9)** $m^3 + 64$ **12)** $a^3 - 343$

2. Разложите на множители:

1) $8x^3 + 1$ **4)** $125b^3 - 1$ **7)** $8x^3 + 27$ **10)** $125b^3 - 216$

2) $27a^3 - 1$ **5)** $216m^3 + 1$ **8)** $27a^3 - 64$ **11)** $216m^3 + 343$

3) $64y^3 + 1$ **6)** $343n^3 - 1$ **9)** $64y^3 + 125$ **12)** $343n^3 - 512$

3. Разложите на множители:

1) $x^6 + y^6$ **5)** $a^6 - 1$ **9)** $64y^6 + 216$

2) $a^6 - b^6$ **6)** $y^6 + 64$ **10)** $x^9 + y^9$

3) $m^6 + n^6$ **7)** $8x^6 + 27$ **11)** $a^9 - b^9$

4) $x^6 + 1$ **8)** $27a^6 - 125$ **12)** $m^9 + 1$

4. Разложите на множители:

1) $x^3 + \frac{1}{8}$

2) $a^3 - \frac{1}{27}$

3) $y^3 + \frac{8}{125}$

4) $b^3 - \frac{27}{64}$

5) $m^3 + \frac{64}{343}$

6) $n^3 - \frac{125}{216}$

7) $\frac{1}{27}x^3 + 1$

8) $\frac{8}{125}a^3 - 1$

9) $\frac{27}{64}y^3 + 1$

10) $x^3 + 0.001$

11) $a^3 - 0.008$

12) $y^3 + 0.027$

5. Разложите на множители:

1) $8x^3 + 27y^3$

2) $27a^3 - 64b^3$

3) $125m^3 + 216n^3$

4) $64x^3 - 125y^3$

5) $216a^3 + 343b^3$

6) $343p^3 - 512q^3$

7) $0.125x^3 + 0.064$

8) $0.216a^3 - 0.343$

9) $0.512y^3 + 0.729$

10) $1 + 0.008x^3$

11) $27 - 0.001a^3$

12) $64 + 0.027b^3$

6. Разложите на множители:

1) $x^9 + 27y^3$

2) $a^9 - 64b^6$

3) $m^{12} + 125n^3$

4) $8x^6 + 27y^9$

5) $27a^3b^3 - 64$

6) $125x^3y^6 + 216$

7) $x^3y^3 + z^3$

8) $a^3b^6 - c^3$

9) $m^6n^9 + p^3$

10) $64x^6y^3 - 27z^3$

11) $8a^9b^6 + 125c^3$

12) $27m^3n^9 - 64p^6$

Разложение квадратного трёхчлена

Теория

В этой главе мы будем раскладывать на множители квадратные трехчлены. Таким термином называют выражение вида $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$.

Оказывается, любой квадратный трёхчлен можно разложить на множители, если знать его корни. Для этого есть замечательная формула:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Корни можно находить разными способами. Мы рассмотрим два: через дискриминант и через теорему Виета.

Дискриминант: $D = b^2 - 4ac$. Если $D > 0$, то два разных корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Если $D = 0$, то один корень (два одинаковых):

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Если $D < 0$, то действительных корней нет, и трёхчлен на линейные множители не раскладывается.

Теорема Виета: для приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$:

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

Если трёхчлен не приведённый ($a \neq 1$), можно сначала вынести a за скобки, а потом работать с приведённым.

Пример 1

Разложение через дискриминант (два корня)

Давайте рассмотрим простой пример. Разложим на множители:

$$x^2 - 5x + 6$$

Найдём корни уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$. Здесь $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$.

Вычисляем дискриминант:

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

Корни:

$$x_1 = \frac{5 - 1}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

Теперь применяем формулу:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Пример 2

Разложение через дискриминант (один корень)

Рассмотрим пример, где дискриминант равен нулю:

$$x^2 - 6x + 9$$

Находим дискриминант:

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

Корень один:

$$x = \frac{6}{2} = 3$$

По формуле получаем:

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3) = (x - 3)^2$$

Пример 3

Разложение через теорему Виета

Для приведённых трёхчленов часто удобнее использовать теорему Виета. Разложим:

$$x^2 - 7x + 12$$

Нужно найти два числа, сумма которых равна 7 (с противоположным знаком, так как в формуле $x_1 + x_2 = -p$, а у нас $p = -7$, значит $-p = 7$), а произведение равно 12.

Подбираем: 3 и 4 дают сумму 7 и произведение 12. Значит:

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$$

Пример 4

Трёхчлен с отрицательными корнями

Разложим на множители:

$$x^2 + 5x + 6$$

Ищем два числа, сумма которых равна -5 (потому что $p = 5$, значит $-p = -5$), а произведение равно 6.

Это числа -2 и -3: $(-2) + (-3) = -5$, $(-2) \cdot (-3) = 6$. Значит:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

Пример 5

Когда первый коэффициент не равен 1

Давайте рассмотрим пример, где $a \neq 1$:

$$2x^2 - 7x + 3$$

Здесь удобнее использовать дискриминант. Вычисляем:

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25$$

Корни:

$$x_1 = \frac{7 - 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{7 + 5}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Применяем формулу $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$:

$$2x^2 - 7x + 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3)$$

Можно избавиться от дроби, умножив первую скобку на 2:

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3) = (2x - 1)(x - 3)$$

Пример 6

Ещё один пример с первым коэффициентом

Разложим на множители:

$$3x^2 + 5x - 2$$

Находим дискриминант:

$$D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25 + 24 = 49$$

Корни:

$$x_1 = \frac{-5 - 7}{6} = \frac{-12}{6} = -2, \quad x_2 = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Применяем формулу:

$$3x^2 + 5x - 2 = 3(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

Умножаем вторую скобку на 3, чтобы избавиться от дроби:

$$3(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (x+2)(3x-1)$$

Пример 7

Корни — иррациональные числа

Рассмотрим пример, где корни получаются иррациональными:

$$x^2 - 4x - 1$$

Вычисляем дискриминант:

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 16 + 4 = 20$$

Корни:

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{20}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5}, \quad x_2 = 2 + \sqrt{5}$$

Тогда разложение выглядит так:

$$x^2 - 4x - 1 = (x - (2 - \sqrt{5}))(x - (2 + \sqrt{5})) = (x - 2 + \sqrt{5})(x - 2 - \sqrt{5})$$

Пример 8

Квадратный трёхчлен с параметром

Иногда в трёхчлене есть две буквы. Например:

$$x^2 - 5ax + 6a^2$$

Рассматриваем это как квадратный трёхчлен относительно x, где коэффициенты содержат a. Находим дискриминант:

$$D = (-5a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6a^2 = 25a^2 - 24a^2 = a^2$$

Корни:

$$x_1 = \frac{5a - a}{2} = \frac{4a}{2} = 2a, \quad x_2 = \frac{5a + a}{2} = \frac{6a}{2} = 3a$$

Значит:

$$x^2 - 5ax + 6a^2 = (x - 2a)(x - 3a)$$

Пример 9

Когда дискриминант отрицательный

Разложим на множители:

$$x^2 + 2x + 3$$

Вычисляем дискриминант:

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8 < 0$$

Дискриминант отрицательный, значит действительных корней нет. Такой квадратный трёхчлен на линейные множители с действительными числами не раскладывается.

Пример 10

Разложение с вынесением минуса

Иногда удобно сначала вынести минус. Например:

$$-x^2 + 3x + 4$$

Вынесем минус за скобки:

$$-x^2 + 3x + 4 = -(x^2 - 3x - 4)$$

Теперь раскладываем трёхчлен в скобках. По теореме Виета ищем числа с суммой 3 и произведением -4. Это 4 и -1:

$$x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$$

Значит:

$$-x^2 + 3x + 4 = -(x-4)(x+1)$$

Пример 11

Сначала выносим общее число

Давайте рассмотрим пример, где перед разложением квадратного трёхчлена удобно вынести общий числовой множитель:

$$2x^2 - 10x + 12$$

Заметим, что все коэффициенты делятся на 2. Вынесем 2 за скобки:

$$2x^2 - 10x + 12 = 2(x^2 - 5x + 6)$$

Теперь раскладываем трёхчлен в скобках. По теореме Виета подбираем числа с суммой 5 и произведением 6. Это 2 и 3:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Значит:

$$2x^2 - 10x + 12 = 2(x-2)(x-3)$$

Пример 12

Сначала выносим общие коэффициенты

А теперь пример, где можно вынести общий множитель, содержащий букву:

$$3x^3 - 15x^2 + 18x$$

Обратим внимание, что каждое слагаемое содержит x. Вынесем $3x$ за скобки:

$$3x^3 - 15x^2 + 18x = 3x(x^2 - 5x + 6)$$

В скобках снова знакомый трёхчлен $x^2 - 5x + 6$, который раскладывается как $(x-2)(x-3)$. Получаем:

$$3x^3 - 15x^2 + 18x = 3x(x-2)(x-3)$$

Пример 13

Сначала выносим общую степень x

Рассмотрим пример, где общим множителем является степень x:

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2$$

В каждом слагаемом есть x^2. Вынесем его за скобки:

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 = x^2(x^2 - 5x + 6)$$

А $x^2 - 5x + 6$ мы уже много раз раскладывали: это $(x-2)(x-3)$. Значит:

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 = x^2(x-2)(x-3)$$

Задачи

1. Разложите на множители:

1) $x^2 - 3x + 2$	**4)** $x^2 - 6x + 5$	**7)** $x^2 + 4x + 3$	**10)** $x^2 + 7x + 6$
2) $x^2 - 4x + 3$	**5)** $x^2 - 7x + 6$	**8)** $x^2 + 5x + 4$	**11)** $x^2 - 4x - 5$
3) $x^2 - 5x + 4$	**6)** $x^2 + 3x + 2$	**9)** $x^2 + 6x + 5$	**12)** $x^2 + 4x - 5$

2. Разложите на множители:

1) $2x^2 - 5x + 2$
2) $3x^2 - 7x + 2$
3) $4x^2 - 9x + 2$
4) $2x^2 + 5x + 2$
5) $3x^2 + 7x + 2$
6) $4x^2 + 9x + 2$
7) $2x^2 - 7x + 3$
8) $3x^2 - 10x + 3$
9) $4x^2 - 13x + 3$
10) $2x^2 + 7x + 3$
11) $3x^2 + 10x + 3$
12) $4x^2 + 13x + 3$

3. Разложите на множители:

1) $x^2 + 5x + 6$
2) $x^2 + 7x + 12$
3) $x^2 + 9x + 20$
4) $x^2 + 5x - 6$
5) $x^2 + 7x - 8$
6) $x^2 + 9x - 10$
7) $x^2 - 5x - 6$
8) $x^2 - 7x - 8$
9) $x^2 - 9x - 10$
10) $2x^2 + 5x - 3$
11) $3x^2 + 7x - 6$
12) $4x^2 + 9x - 9$

4. Разложите на множители:

1) $x^2 - 4x - 1$
2) $x^2 - 4x - 2$
3) $x^2 - 4x - 3$
4) $x^2 - 6x + 2$
5) $x^2 - 6x + 3$
6) $x^2 - 6x + 4$
7) $x^2 - 2x - 2$
8) $x^2 - 2x - 3$
9) $x^2 - 2x - 4$
10) $2x^2 - 4x - 1$
11) $3x^2 - 6x - 2$
12) $4x^2 - 8x - 3$

5. Разложите на множители:

1) $x^2 - 5ax + 6a^2$
2) $x^2 - 7ax + 12a^2$
3) $x^2 - 9ax + 20a^2$
4) $x^2 - 5ax - 6a^2$
5) $x^2 - 7ax - 8a^2$
6) $x^2 - 9ax - 10a^2$
7) $x^2 + 5ax + 6a^2$
8) $x^2 + 7ax + 12a^2$
9) $x^2 + 9ax + 20a^2$
10) $2x^2 - 5ax + 2a^2$
11) $3x^2 - 7ax + 2a^2$
12) $4x^2 - 9ax + 2a^2$

6. Разложите на множители:

1) $-x^2 + 3x + 4$
2) $-x^2 + 5x + 6$
3) $-x^2 + 7x + 8$
4) $-x^2 + 3x - 2$
5) $-x^2 + 5x - 4$
6) $-x^2 + 7x - 6$
7) $-x^2 - 3x + 4$
8) $-x^2 - 5x + 6$
9) $-x^2 - 7x + 8$
10) $-2x^2 + 5x - 2$
11) $-3x^2 + 7x - 2$
12) $-4x^2 + 9x - 2$

7. Разложите на множители:

1) $2x^2 - 8x + 6$
2) $3x^2 - 15x + 18$
3) $4x^2 - 20x + 24$
4) $5x^2 - 25x + 20$
5) $6x^2 - 30x + 36$
6) $2x^2 - 12x + 16$
7) $3x^2 - 21x + 30$
8) $4x^2 - 28x + 40$
9) $2x^3 - 8x^2 + 6x$
10) $3x^3 - 15x^2 + 18x$
11) $4x^3 - 20x^2 + 24x$
12) $5x^3 - 25x^2 + 20x$
13) $6x^3 - 30x^2 + 36x$
14) $2x^3 - 12x^2 + 16x$
15) $3x^3 - 21x^2 + 30x$
16) $4x^3 - 28x^2 + 40x$
17) $2x^4 - 8x^3 + 6x^2$
18) $3x^4 - 15x^3 + 18x^2$

19) $4x^4-20x^3+24x^2$

20) $5x^4-25x^3+20x^2$

21) $6x^4-30x^3+36x^2$

22) $2x^4-12x^3+16x^2$

23) $3x^4-21x^3+30x^2$

24) $4x^4-28x^3+40x^2$

25) $2x^5-10x^4+12x^3$

26) $3x^5-15x^4+18x^3$

27) $4x^5-20x^4+24x^3$

28) $5x^5-25x^4+30x^3$

29) $6x^5-30x^4+36x^3$

30) $2x^5-14x^4+20x^3$

31) $3x^5-21x^4+30x^3$

32) $4x^5-28x^4+40x^3$

33) $2x^3-10x^2y+12xy^2$

34) $3x^3-15x^2y+18xy^2$

35) $4x^3-20x^2y+24xy^2$

36) $5x^3-25x^2y+30xy^2$

37) $6x^3-30x^2y+36xy^2$

38) $2x^4y-8x^3y+6x^2y$

39) $3x^4y-15x^3y+18x^2y$

40) $4x^4y-20x^3y+24x^2y$

41) $5x^4y-25x^3y+20x^2y$

42) $6x^4y-30x^3y+36x^2y$

43) $2x^2-8xy+6y^2$

44) $3x^2-15xy+18y^2$

45) $4x^2-20xy+24y^2$

46) $5x^2-25xy+20y^2$

47) $6x^2-30xy+36y^2$

48) $2x^2-12xy+16y^2$

49) $3x^2-21xy+30y^2$

50) $4x^2-28xy+40y^2$

51) $2x^3y-8x^2y^2+6xy^3$

52) $3x^3y-15x^2y^2+18xy^3$

53) $4x^3y-20x^2y^2+24xy^3$

54) $5x^3y-25x^2y^2+30xy^3$

8. Разложите на множители:

1) $x^2-8x+15$

2) $x^2+8x+12$

3) $2x^2-7x+3$

4) x^2-4x-5

5) $3x^2+10x+3$

6) $x^2-5ax+6a^2$

7) x^2+6x+8

8) $4x^2-11x+6$

9) $x^2-10x+21$

10) $x^2+9x-10$

11) $5x^2-8x+3$

12) $x^2-7ax+10a^2$

13) $x^2-12x+27$

14) x^2+7x-8

15) $6x^2-13x+6$

16) $x^2-3ax-4a^2$

17) $x^2+10x+24$

18) $2x^2+5x-3$

19) $x^2-11x+28$

20) $x^2+5x-14$

21) $3x^2-16x+5$

22) $x^2+8ax+15a^2$

23) $x^2-9x+20$

24) $4x^2+7x-2$

25) $x^2+11x+24$

26) x^2-6x-7

27) $5x^2-12x+4$

28) $x^2-9ax+14a^2$

29) $x^2+12x+32$

30) $3x^2-5x-2$

31) $x^2-13x+40$

32) $x^2+7ax-8a^2$

33) $2x^2+9x+4$

34) x^2-8x-9

35) $6x^2-7x-3$

36) $x^2+5ax-6a^2$

37) $x^2+9x+18$

38) $4x^2-5x-6$

39) $x^2-10ax+21a^2$

40) $x^2-14x+48$

41) $3x^2+11x-4$

42) x^2+8x-9

43) $5x^2+7x+2$

44) $x^2+6ax-7a^2$

45) $x^2-15x+54$

46) $2x^2-11x+5$

47) $x^2-4ax-5a^2$

48) $x^2+13x+36$

49) $4x^2+11x-3$

50) $x^2-12ax+35a^2$

51) $x^2+14x+45$

52) $3x^2-14x+8$

53) $x^2+9ax-10a^2$

54) $x^2-16x+63$

55) $5x^2+9x-2$

56) $x^2+10ax+21a^2$

57) $2x^2-13x+15$

58) $x^2 - 7x - 18$

59) $6x^2 + 5x - 4$

60) $x^2 - 8ax - 9a^2$

61) $x^2 + 15x + 54$

62) $4x^2 - 9x - 9$

63) $x^2 + 11ax + 24a^2$

64) $3x^2 + 13x + 4$

65) $x^2 - 9x - 22$

66) $5x^2 - 14x - 3$

67) $x^2 - 11ax + 28a^2$

68) $x^2 + 16x + 63$

69) $2x^2 + 7x - 4$

70) $x^2 - 10ax - 11a^2$

71) $x^2 - 17x + 70$

72) $4x^2 + 13x + 3$

73) $x^2 + 12ax + 35a^2$

74) $x^2 + 17x + 70$

75) $3x^2 - 19x + 6$

76) $x^2 - 12ax - 13a^2$

Разложение по схеме Горнера

Теория

Мы уже умеем раскладывать квадратные трёхчлены. А как быть, если степень многочлена выше второй? Например, кубический многочлен или многочлен четвёртой степени?

Оказывается, любой многочлен можно разложить на множители, если найти его корни. Для этого есть замечательная формула:

$$\mathbf{P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — корни многочлена $P(x)$, а a_n — старший коэффициент.

Если число a является корнем многочлена (то есть $P(a) = 0$), то многочлен делится на $(x - a)$ без остатка. И так можно делать до тех пор, пока многочлен не разложится полностью.

Для поиска целых корней есть простое правило: если многочлен имеет целые коэффициенты, то все целые корни нужно искать среди делителей свободного члена.

А чтобы быстро делить многочлен на $(x - a)$, используют схему Горнера.

Как работает схема Горнера:

Записываем коэффициенты многочлена в строчку (не забываем про нулевые коэффициенты для пропущенных степеней), затем проводим вычисления по следующему правилу:

1. Сносим первый коэффициент вниз без изменений.
2. Умножаем его на число a (наше предполагаемое значение корня) и записываем результат под следующим коэффициентом.
3. Складываем этот результат со следующим коэффициентом и записываем сумму внизу.
4. Повторяем шаги 2-3 для всех коэффициентов.
5. Последнее полученное число — это остаток от деления. Если он равен нулю, значит a действительно является корнем, а числа в нижней строке — коэффициенты частного (многочлена степени на единицу меньше).

Пример 1

Находим целый корень

Давайте разберёмся, как раскладывать многочлен на множители с помощью схемы Горнера. Возьмём такой пример:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Шаг 1. Ищем корень. Если у многочлена есть целые корни, то они находятся среди делителей свободного члена. Свободный член здесь -6. Его делители: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.

Начинаем подставлять по очереди:

Проверяем $x = 1$:

$$1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$$

Получили ноль! Значит, $x = 1$ — корень.

Шаг 2. Делим многочлен на $(x - 1)$ с помощью схемы Горнера.

Выписываем коэффициенты многочлена в строчку (обязательно в порядке убывания степеней):

$$1, -6, 11, -6$$

Рисуем таблицу. Слева ставим найденный корень (1):

	1	-6	11	-6
1				

Как заполнять:

1. Первый коэффициент (1) просто сносим вниз:

	1	-6	11	-6
1				
	1			

2. Умножаем этот снесённый коэффициент (1) на корень (1): $1 \cdot 1 = 1$. Записываем результат под вторым коэффициентом:

	1	-6	11	-6
1		1		
	1			

3. Складываем второй коэффициент (-6) с этим числом (1): $-6 + 1 = -5$. Записываем сумму внизу:

	1	-6	11	-6
1		1		
	1	-5		

4. Умножаем полученное число (-5) на корень (1): $(-5) \cdot 1 = -5$. Записываем под третьим коэффициентом:

	1	-6	11	-6
1		1	-5	
	1	-5		

5. Складываем третий коэффициент (11) с этим числом (-5): $11 + (-5) = 6$. Записываем внизу:

	1	-6	11	-6
1		1	-5	
	1	-5	6	

6. Умножаем полученное число (6) на корень (1): $6 \cdot 1 = 6$. Записываем под четвёртым коэффициентом:

	1	-6	11	-6
1		1	-5	6
	1	-5	6	

7. Складываем четвёртый коэффициент (-6) с этим числом (6): $-6 + 6 = 0$. Записываем внизу:

	1	-6	11	-6
1		1	-5	6
	1	-5	6	0

Шаг 3. Читаем результат. Последнее число внизу (0) — это остаток. Раз он равен нулю, значит деление выполнилось нацело. Числа в нижней строке перед остатком — это коэффициенты частного.

У нас получились числа: $1, -5, 6$. Это значит, что частное — многочлен второй степени:

$$1 \cdot x^2 + (-5) \cdot x + 6 = x^2 - 5x + 6$$

Шаг 4. Раскладываем частное дальше. Получили квадратный трёхчлен $x^2 - 5x + 6$. Его можно разложить по теореме Виета: ищем два числа, сумма которых равна 5, а произведение 6. Это 2 и 3. Значит:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Шаг 5. Записываем окончательный ответ. Мы делили исходный многочлен на $(x - 1)$ и получили $(x^2 - 5x + 6)$, который разложился на $(x - 2)(x - 3)$. Значит:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

Вот так шаг за шагом мы разложили кубический многочлен на три линейных множителя.

Пример 2

Многочлен четвёртой степени

Разложим на множители:

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$$

Делители свободного члена 24: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$.

Проверяем $x = 1$:

$$1 - 10 + 35 - 50 + 24 = 0$$

— подходит.

Делим на $(x - 1)$:

	1	-10	35	-50	24
1		1	-9	26	-24
	1	-9	26	-24	0

Получили $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$. Ищем корни этого кубического многочлена среди делителей -24.

Проверяем $x = 2$:

$$8 - 36 + 52 - 24 = 0$$

— подходит.

Делим на $(x - 2)$:

	1	-9	26	-24
2		2	-14	24
	1	-7	12	0

Получили $x^2 - 7x + 12$. Раскладываем:

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$$

Значит:

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$$

Пример 3

Отрицательный корень

Разложим на множители:

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12$$

Делители -12: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$.

Проверяем $x = 2$:

$$8 + 12 - 8 - 12 = 0$$

— подходит.

Делим на $(x - 2)$:

	1	3	-4	-12
2		2	10	12
	1	5	6	0

Получили $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

Значит:

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x - 2)(x + 2)(x + 3)$$

Пример 4

Корень — дробь

Разложим на множители:

$$2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$$

Ищем целые корни среди делителей 6: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Проверяем: $x = 1$: $2 - 3 - 11 + 6 = -6 \neq 0$ $x = -1$: $-2 - 3 + 11 + 6 = 12 \neq 0$ $x = 2$: $16 - 12 - 22 + 6 = -12 \neq 0$ $x = -2$: $-16 - 12 + 22 + 6 = 0$ — подходит!

Делим на $(x + 2)$:

	2	-3	-11	6
-2		-4	14	-6
	2	-7	3	0

Получили $2x^2 - 7x + 3$. Решаем квадратное уравнение:

$$D = 49 - 24 = 25$$

$$x = \frac{7 \pm 5}{4} = \frac{1}{2}, 3$$

Значит:

$$2x^2 - 7x + 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3) = (2x - 1)(x - 3)$$

Окончательно:

$$2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = (x + 2)(2x - 1)(x - 3)$$

Пример 5

Кратный корень

Разложим на множители:

$$x^3 - 3x + 2$$

Делители 2: $\pm 1, \pm 2$. $x = 1$: $1 - 3 + 2 = 0$ — корень.
Делим на $(x - 1)$:

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0

Получили $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$.
Значит:

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x + 2)(x - 1) = (x - 1)^2(x + 2)$$

Пример 6

Многочлен пятой степени

Разложим на множители:

$$x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 6x^2$$

Сначала вынесем общий множитель x^2:

$$x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 6x^2 = x^2(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$$

А $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ мы уже раскладывали в примере 1: это $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.
Значит:

$$x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 6x^2 = x^2(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

Задачи

1. Разложите на множители:

1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
2) $x^3 - 7x + 6$
3) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$
4) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
5) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
6) $x^3 + 4x^2 + x - 6$
7) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$
8) $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$
9) $x^3 - 4x^2 - 7x + 10$
10) $x^3 + 5x^2 - 2x - 24$
11) $x^3 - 8x^2 + 19x - 12$
12) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

2. Разложите на множители:

1) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$
2) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$
3) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$
4) $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24$
5) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$
6) $x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24$
7) $x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30$
8) $x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 19x + 30$
9) $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 27x - 54$

3. Разложите на множители:

1) $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$
2) $3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$
3) $2x^3 + 5x^2 - x - 6$
4) $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$
5) $4x^3 - 4x^2 - 11x + 6$
6) $6x^3 + 5x^2 - 3x - 2$
7) $2x^3 - 7x^2 - 17x + 10$
8) $3x^3 - 10x^2 - 9x + 4$
9) $4x^3 + 8x^2 - x - 2$
10) $6x^3 - 5x^2 - 2x + 1$
11) $2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$
12) $3x^3 - 14x^2 + 13x - 4$

4. Разложите на множители:

1) $x^3 - 3x + 2$
2) $x^3 - 3x^2 + 4$
3) $x^3 + 3x^2 - 4$
4) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$
5) $x^3 - 2x^2 - 4x + 8$
6) $x^3 + 4x^2 - 8x - 32$

7) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

8) $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$

9) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

5. Разложите на множители:

1) $x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 6x^2$

2) $2x^4 - 12x^3 + 22x^2 - 12x$

3) $3x^5 - 15x^4 + 18x^3$

4) $x^6 - 6x^5 + 11x^4 - 6x^3$

5) $4x^4 - 16x^3 + 20x^2 - 8x$

6) $2x^5 - 10x^4 + 14x^3 - 6x^2$

7) $x^7 - 6x^6 + 11x^5 - 6x^4$

8) $3x^6 - 15x^5 + 18x^4 - 6x^3$

9) $5x^4 - 25x^3 + 30x^2 - 10x$

6. Разложите на множители:

1) $x^3 - 2x^2 - 13x - 10$

2) $x^3 + 5x^2 + 2x - 8$

3) $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$

4) $2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$

5) $3x^3 - 2x^2 - 12x + 8$

6) $4x^3 + 4x^2 - 11x + 3$

7) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$

8) $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

9) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$

10) $2x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 5x + 3$

11) $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 8x + 5$

12) $4x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 4x + 3$

Практика на все приемы

Теория

Мы изучили много разных способов разложения на множители:

- вынесение общего множителя;
- метод группировки;
- разность квадратов;
- квадрат суммы и квадрат разности;
- разложение кубов;
- разложение квадратного трёхчлена через корни;
- схема Горнера для многочленов высших степеней.

В этой главе собраны задачи на все эти приёмы. Они идут вперемешку — от самых простых до сложных, где нужно применить несколько способов подряд. Ваша задача — посмотреть на выражение, понять, с чего начать, и последовательно раскладывать, пока не получится произведение множителей.

Задачи

1. Разложите на множители:

1) $7a + 7b$
2) $x^2 - 9$
3) $x^2 + 4x + 4$
4) $ax + ay + bx + by$
5) $12x - 12y$
6) $a^3 - a^2$
7) $y^2 - 16$
8) $2x + 2y + mx + my$
9) $x^2 - 6x + 9$
10) $5m - 5n$
11) $a^2 - 25$
12) $3a + 3b + ma + mb$

2. Разложите на множители:

1) $x^2 - 4x + 4$
2) $8a^2 + 4a$
3) $4x^2 - 9$
4) $x^2 + 5x + 6$
5) $15x^3 - 5x^2$
6) $a^2 - 2a + 1$
7) $9x^2 - 16$
8) $x^2 - 3x + 2$
9) $12y^4 + 18y^3$
10) $m^2 + 6m + 9$
11) $25a^2 - 4$
12) $x^2 + 7x + 12$

3. Разложите на множители:

1) $x^3 + y^3$
2) $x^2 - 5x + 4$
3) $10a^3b + 15a^2b^2$
4) $a^3 - b^3$
5) $x^2 + 3x - 4$
6) $24x^2y^3 - 18x^3y^2$
7) $8x^3 + 1$
8) $x^2 + 8x + 15$
9) $18a^3b^2c + 27a^2b^3c$
10) $27a^3 - 64$
11) $x^2 - 8x + 12$
12) $16x^3y^2 + 24x^2y^3$

4. Разложите на множители:

1) $x^4 - 1$
2) $2x^2 - 8x + 6$
3) $ax - ay - bx + by$
4) $x^4 - 16$
5) $3x^2 - 15x + 18$
6) $x^2 + 5x + 6 - y^2$
7) $x^6 - y^6$
8) $4x^2 - 20x + 24$
9) $a^2 - 4a + 4 - b^2$
10) $x^6 - 64$
11) $2x^2 - 12x + 16$
12) $m^2 + 6m + 9 - n^2$

5. Разложите на множители:

1) $x^3 - 3x + 2$
2) $2x^3 - 8x$
3) $x^2 - 5x + 6 - y^2$
4) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
5) $3x^3 - 12x$
6) $4x^2 - 4x + 1 - 9y^2$
7) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$
8) $4x^3 - 36x$
9) $9a^2 - 6a + 1 - 16b^2$
10) $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$
11) $5x^3 - 20x$
12) $25x^2 - 10x + 1 - 4y^2$

6. Разложите на множители:

1) $x^4 - 5x^2 + 4$
2) $2x^3 + 2x^2y - 8x - 8y$
3) $x^3 - 7x + 6$
4) $x^4 - 10x^2 + 9$
5) $3x^3 + 3x^2y - 12x - 12y$
6) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
7) $x^4 - 13x^2 + 36$
8) $4x^3 + 4x^2y - 16x - 16y$
9) $x^3 + 4x^2 + x - 6$
10) $x^4 - 17x^2 + 16$
11) $5x^3 + 5x^2y - 20x - 20y$
12) $2x^3 + 5x^2 - x - 6$

7. Разложите на множители:

1) $x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2$
2) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$
3) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$
4) $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x$
5) $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$
6) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$
7) $2x^5 - 2x^4 - 8x^3 + 8x^2$
8) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$
9) $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24$
10) $3x^5 - 3x^4 - 12x^3 + 12x^2$
11) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$
12) $x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24$

8. Разложите на множители:

1) $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$
2) $x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 6x^2$
3) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$
4) $x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8$
5) $2x^5 - 12x^4 + 22x^3 - 12x^2$
6) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9$
7) $x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 8$
8) $3x^5 - 15x^4 + 18x^3 - 6x^2$
9) $x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16$
10) $x^6 - 8x^4 + 16x^2 - 1$
11) $4x^5 - 24x^4 + 44x^3 - 24x^2$
12) $x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x + 16$

9. Разложите на множители:

1) $x^3 + \dfrac{1}{8}$
2) $x^2 - 0.6x + 0.09$
3) $\dfrac{4}{9}x^2 - \dfrac{1}{4}$
4) $a^3 - \dfrac{27}{64}$
5) $y^2 + 0.2y + 0.01$
6) $\dfrac{9}{16}x^2 - \dfrac{4}{25}$
7) $b^3 + \dfrac{64}{125}$
8) $x^2 - 1.4x + 0.49$
9) $\dfrac{16}{25}a^2 - \dfrac{9}{49}$
10) $x^3 - 0.027$
11) $m^2 + 1.2m + 0.36$
12) $\dfrac{25}{36}y^2 - \dfrac{1}{9}$

10. Разложите на множители:

1) $(x+1)^2 - 4$
2) $(a-2)^2 - 9b^2$
3) $x^2 - 2x + 1 - y^2$
4) $(2x+1)^2 - (x-3)^2$
5) $(3a-2)^2 - 16b^2$
6) $4x^2 + 4x + 1 - 9y^2$
7) $(x+2)^2 - (y-1)^2$
8) $(4a+3)^2 - 25b^2$
9) $9x^2 - 6x + 1 - 16y^2$
10) $(x-3)^2 - (y+2)^2$
11) $(5m-4)^2 - 49n^2$
12) $16a^2 - 8a + 1 - 25b^2$

11. Разложите на множители:

1) $2x^2 - 8x + 8$

2) $3a^3 - 27a$

3) $x^4 - 2x^2 + 1$

4) $4x^3 - 36x$

5) $5y^4 - 5y^2$

6) $x^4 + 4x^2 + 4$

7) $6a^3 - 24a$

8) $2x^4 - 32$

9) $x^4 - 6x^2 + 9$

10) $8b^3 - 50b$

11) $3x^4 - 27x^2$

12) $x^4 + 8x^2 + 16$

12. Разложите на множители:

1) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

2) $2x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 5x + 3$

3) $x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 6x^2$

4) $3x^3 - 10x^2 - 9x + 4$

5) $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 27x - 54$

6) $4x^5 - 4x^4 - 11x^3 + 4x^2 + 3x$

7) $x^3 - 8x^2 + 19x - 12$

8) $2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 3x$

9) $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x$

10) $x^3 + 5x^2 - 2x - 24$

11) $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 8x + 5$

12) $2x^5 + 9x^4 + 7x^3 - 6x^2$

Заключение

Вот мы и добрались до конца книги. Если вы дошли до этих строк и прорешали хотя бы часть задач — значит, вы проделали большую работу. Поздравляю!

Разложение на множители — это как езда на велосипеде. Сначала кажется сложным, непонятно, за что хвататься, какой способ применить. Но чем больше практикуешься, тем увереннее себя чувствуешь. А потом начинаешь замечать, что многие примеры можно решить разными способами, и это даже интересно — искать самый красивый и короткий путь.

В этой книге мы разобрали все основные приёмы:

- научились выносить общий множитель;
- освоили группировку;
- запомнили формулы сокращённого умножения;
- научились раскладывать квадратные трёхчлены;
- добрались даже до схемы Горнера и многочленов высших степеней.

Но главное — мы научились всё это комбинировать. Потому что в реальных примерах редко бывает достаточно одного действия. Обычно нужно сначала вынести общий множитель, потом применить формулу, потом ещё что-нибудь. И чем больше у вас опыта, тем быстрее вы видите эту последовательность.

Если какие-то темы остались непонятыми — не расстраивайтесь. Вернитесь к ним ещё раз, порешайте дополнительные задачи. Математика не терпит суеты, но она очень благодарна тем, кто проявляет терпение и настойчивость.

А если вам понравился такой формат — теория, примеры, много задач — у меня есть и другие книги. На сайте books.mrepetitor.com вы найдёте пособия по разным темам школьной математики и физики. Там же есть научно-популярные книги, которые я писал для тех учеников, кому интересно не только решать задачи, но и понимать, как устроен окружающий мир, как развивалась наука и какие люди стояли за великими открытиями.

Записаться на мои занятия можно на сайте study.mrepetitor.com. Я продолжаю преподавать математику и физику для школьников с 5 по 11 классы, готовлю к ЕГЭ, ОГЭ и ЦТ. Если чувствуете, что нужна помощь, или хотите подготовиться к экзаменам — обращайтесь!

Желаю вам успехов в учёбе, побольше интересных задач и удовольствия от их решения!

Дмитрий Трепачёв